

**PHƯƠNG PHÁP KẾT HỢP
BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ VÀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ
ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
CỦA BIỂU THỨC BA BIẾN**

Huỳnh Chí Hào
THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu

I. MỞ ĐẦU

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của các biểu thức 3 biến thường được chọn làm bài khó nhất trong kỳ thi tuyển sinh đại học những năm gần đây. Phương pháp thường sử dụng là kết hợp bất đẳng thức đại số và tính đơn điệu của hàm số để tìm GTLN và GTNN.

II. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bước 1: Biến đổi biểu thức nhiều biến về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Bước 2: Sử dụng các bất đẳng thức đại số để tìm điều kiện của ẩn phụ (điều kiện ĐÚNG).

Bước 3: Tìm GTLN, GTNN bằng cách khảo sát hàm một biến (hàm của ẩn phụ).

Một số bất đẳng thức đại số hai biến và ba biến thường sử dụng

$$1) ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$2) ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$3) (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$4) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca ;$$

$$5) 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 ;$$

$$6) (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) ;$$

$$7) a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad \forall a, b \geq 0 ;$$

$$8) a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \quad \forall a, b, c \geq 0 .$$

Lưu ý: Với các biểu thức đối xứng 3 biến a, b, c ta có thể đặt một trong các biểu thức sau là ẩn phụ

$$a+b+c; \quad ab+bc+ca; \quad a^2+b^2+c^2$$

III. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Đề thi THPTQG 2015). Cho các số thực $a, b, c \in [1, 3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc.$$

Ý TƯỞNG

+ Quan sát và nhận xét

- P là biểu thức đối xứng theo 3 biến a, b, c .
- Nhớ lại rằng P có thể biểu diễn theo các biểu thức đối xứng cơ bản: $a + b + c$ hoặc abc hoặc $ab + bc + ca$.

+ Định hướng sơ lược

- Phân tích dữ kiện $a, b, c \in [1, 3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$, kết hợp với biểu thức P định ra các hướng đi.
- Đặt ẩn phụ hợp lý, tìm điều kiện ẩn phụ để biểu diễn biểu thức P (hoặc ước lượng biểu thức P) thành biểu thức một biến sau đó sử dụng công cụ đạo hàm để giải quyết.

Lưu ý

- + Quá trình tư duy ở bước này khó khăn và tính thách thức cao.
- + Nên sử dụng công cụ sơ đồ tư duy để phân tích tìm hướng giải.

THỰC HIỆN TỪNG BƯỚC Ý TƯỞNG

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức nhiều biến có thể đặt ẩn phụ

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2.(ab + bc + ca).abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc \\ &= \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{abc}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

So sánh abc với $ab + bc + ca$ để ước lượng biểu thức P

$$\text{Do } a, b, c \in [1, 3] \text{ nên } (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq ab + bc + ca - (a + b + c) = ab + ba + ca - 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P \leq \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{ab + ba + ca - 5}{2} = \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{t - 5}{2} \quad \text{với } t = ab + bc + ca$$

B2 • Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t

i) Do $a, b, c \in [1, 3]$ nên $(3-a)(3-b)(3-c) \geq 0$

$$\Rightarrow 3(ab + bc + ca) \geq abc + 9(a + b + c) - 27 = abc + 27 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } 3(ab + bc + ca) \geq ab + bc + ca + 22 \Rightarrow 3t \geq t + 22 \Rightarrow t \geq 11 \quad (4)$$

Dấu “=” ở (4) xảy ra khi $a = 1, b = 2, c = 3$.

$$\begin{aligned} \text{ii) Vì } (a + b + c)^2 &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \\ &\Rightarrow 3t \leq 36 \Rightarrow t \leq 12 \end{aligned} \quad (5)$$

Dấu “=” ở (5) xảy ra khi $a = b = c = 2$

Do đó: $11 \leq t \leq 12$. Vậy $t \in [11; 12]$.

B3• Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{t-5}{2} = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}$ với $t \in [11; 12]$

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 144}{2t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 12$

Bảng biến thiên

t	11	12
$f'(t)$	–	0
$f(t)$	$\frac{160}{11}$	$\frac{29}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \leq f(11) = \frac{160}{11} \Rightarrow P \leq \frac{160}{11}$ (*)

Dấu “=” ở (*) xảy ra khi $a = 1, b = 2, c = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{160}{11}$ r

Ví dụ 2. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9}.$$

Ý TƯỞNG

+ Định hướng sơ lược

Biểu thức không có tính đối xứng theo 3 biến. Tuy nhiên điều kiện và mẫu số của số hạng thứ 2 trong biểu thức P lại có tính đối xứng, giả thiết gọi lên ý tưởng về các hằng đẳng thức.

Cần đánh giá ước lượng hai số hạng thứ nhất và thứ ba trong biểu thức P để được biểu thức đối xứng ba biến.

Cụ thể đánh giá các biểu thức $x^2 + yz + x + 1$ và yz với lưu ý đến việc sử dụng điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

THỰC HIỆN TỪNG BƯỚC Ý TƯỞNG

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức nhiều biến có thể đặt ẩn phụ

+ Ta có: $x^2 + yz + x + 1 = x(x + y + z + 1) + (1 - xy - xz + yz)$

và $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = 2(1 - xy - yz + yz) \geq 0$

nên $x^2 + yz + x + 1 \geq x(x + y + z + 1)$.

Từ đó suy ra được: $\frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} \leq \frac{x}{x + y + z + 1}$.

+ Mặt khác:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y+z) + 2yz = 2 + 2yz + 2x(y+z) \leq 2 + 2yz + [x^2 + (y+z)^2] = 4(1+yz)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1+yz}{9} \geq \frac{(x+y+z)^2}{36}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9} \leq \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36} = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36}$$

với $t = x+y+z$

B2 • Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t

$$\text{Do } x, y, z \geq 0 \Rightarrow t = x+y+z \geq 0 \quad (1)$$

Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $x = y = z = 0$

$$\text{Vì } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \leq 2 + (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) = 6 \quad (2)$$

$$\text{Suy ra: } t^2 \leq 6 \Rightarrow t \leq \sqrt{6}.$$

$$\text{Dấu “=” ở (2) xảy ra khi } x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } t \in [0; \sqrt{6}]$$

B3 • Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36} \text{ với } t \in [0; \sqrt{6}]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{t}{18} = -\frac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2}, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bảng biến thiên

t	0	2	$\sqrt{6}$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{31}{30} - \frac{\sqrt{6}}{5}$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra: } f(t) \leq f(2) = \frac{5}{9} \Rightarrow P \leq \frac{5}{9} \quad (*)$$

Dấu “=” ở (*) xảy ra khi $x = y = 1, z = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{5}{9}$ r

Ví dụ 3. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (xy + yz + 2zx)^2 - \frac{8}{(x+y+z)^2 - xy - yz + 2}.$$

Ý TƯỞNG

+ Định hướng sơ lược

Khai triển và thu gọn $(x+y+z)^2 - xy - yz + 2$ sẽ được biểu thức có liên quan đến $xy + yz + 2zx$.
Đặt ẩn phụ $t = xy + yz + 2zx$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t .

THỰC HIỆN TỪNG BƯỚC Ý TƯỞNG

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức nhiều biến có thể đặt ẩn phụ

$$\text{Ta có: } P = (xy + yz + 2zx)^2 - \frac{8}{xy + yz + 2zx + 3} = t^2 - \frac{8}{t+3}$$

B2 • Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t

$$\text{Ta có: } (x+y+z)^2 = 1 + 2(xy + yz + zx) \geq 0 \Rightarrow xy + yz + 2zx \geq -\frac{1}{2} + xz \geq -\frac{1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} = -1 + \frac{y^2}{2} \geq -1 \quad (1)$$

$$\text{Dấu “=” ở (1) xảy ra khi } y=0, x=-z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra: } t \geq -1$$

B3 • HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - \frac{8}{t+3} \text{ với } t \in [-1; +\infty)$$

Sử dụng công cụ đạo hàm sẽ được kết quả như sau:

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P \text{ là } 3 \text{ đạt khi } y=0; x=-z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \otimes$$

Ví dụ 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}.$$

Ý TƯỞNG

+ Định hướng sơ lược

Biến đổi biểu thức P theo $x^2 + y^2 + z^2$

Đặt ẩn phụ $t = x^2 + y^2 + z^2$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t .

THỰC HIỆN TỪNG BƯỚC Ý TƯỞNG

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức nhiều biến có thể đặt ẩn phụ

$$\text{Ta có: } P = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) + 5(x^2 + y^2 + z^2) + 9}{2(x^2 + y^2 + z^2 + 3)} = \frac{2t^2 + 5t + 9}{2t + 6} \text{ với } t = x^2 + y^2 + z^2$$

B2 • Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t

$$\text{Ta có: } (x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \quad (1)$$

Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$. Suy ra: $t \geq 3$

$$\text{Do } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < (x+y+z)^2 = 9$$

Suy ra: $3 \leq t < 9$. Vậy $t \in [3; 9)$

B3• HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t^2 + 5t + 9}{2t + 6}$ với $t \in [3; 9)$

Sử dụng công cụ đạo hàm sẽ được kết quả như sau:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{7}{2}$ đạt khi $x = y = z = 1$ **r**

Ví dụ 5. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $3(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} + xy + yz + zx.$$

Ý TƯỞNG

+ Định hướng sơ lược

Biến đổi biểu thức P theo $x^2 + y^2 + z^2$

Đặt ẩn phụ $t = x^2 + y^2 + z^2$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t

THỰC HIỆN TỪNG BƯỚC Ý TƯỞNG

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức nhiều biến có thể đặt ẩn phụ

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} + xy + yz + zx = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{24 - 5(x^2 + y^2 + z^2)}} + 12 - 3(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{5} \left(3t^2 - t + \frac{24}{t} \right) - \frac{12}{5} \quad \text{với } t = \sqrt{24 - 5(x^2 + y^2 + z^2)} \end{aligned}$$

B2• Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t

Từ giả thiết $3(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = 12 \Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \leq 12 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$\Rightarrow 24 - 5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{24 - 5(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 2 \quad (1)$$

Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $x = 2; y = z = 0$ và các hoán vị. Suy ra: $t \geq 2$

Do $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ nên từ giả thuyết ta lại suy ra được

$$12 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow 24 - 5(x^2 + y^2 + z^2) \leq 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{24 - 5(x^2 + y^2 + z^2)} \leq 3 \quad (2)$$

Dấu “=” ở (2) xảy ra khi $x = y = z = 1$. Suy ra: $t \leq 3$

Suy ra: $2 \leq t \leq 3$. Vậy $t \in [2; 3]$

B3• HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

Tìm GTNN và GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN và GTLN của P

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{5} \left(3t^2 - t + \frac{24}{t} \right) - \frac{12}{5} \text{ với } t \in [2; 3]$$

Sử dụng công cụ đạo hàm sẽ được kết quả như sau:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $x = 2; y = z = 0$ và các hoán vị.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là 4 đạt khi $x = y = z = 1$ **r**

Ví dụ 6. Cho các số thực $x, y, z \in [0; 2]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} - (xy + yz + zx).$$

Ý TƯỞNG

+ Định hướng sơ lược

Biến đổi biểu thức P theo $xy + yz + zx$

Đặt ẩn phụ $t = xy + yz + zx$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t

THỰC HIỆN TỪNG BƯỚC Ý TƯỞNG

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức nhiều biến có thể đặt ẩn phụ

$$\text{Ta có: } P = \frac{9 - 2(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} - (xy + yz + zx) = \frac{9 - 2t}{t} - t \text{ với } t = xy + yz + zx$$

B2• Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t

$$\text{Từ giả thiết } x, y, z \in [0; 2] \Rightarrow (x - 2)(y - 2)(z - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow 24 - 5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq \frac{xyz + 4(x + y + z) - 8}{2} \geq \frac{12 - 8}{2} = 2 \quad (1)$$

Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $x = 2; y = 1, z = 0$ và các hoán vị. Suy ra: $t \geq 2$

$$\text{Do } xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = 3. \quad (2)$$

Dấu “=” ở (2) xảy ra khi $x = y = z = 1$. Suy ra: $t \leq 3$

Suy ra: $2 \leq t \leq 3$. Vậy $t \in [2; 3]$

B3• HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

Tìm GTNN và GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN và GTLN của P

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9 - 2t}{t} - t \text{ với } t \in [2; 3]$$

Sử dụng công cụ đạo hàm sẽ được kết quả như sau:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -2 đạt khi $x = y = z = 1$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{2}$ đạt khi $x = 2; y = 1, z = 0$ và các hoán vị **r**

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = ab + bc + ca + \frac{5}{a + b + c}.$$

Hướng dẫn:

+ Đặt $t = a + b + c$ với $t \in [\sqrt{3}; 3]$

+ Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{t} - \frac{3}{2}$ với $t \in [\sqrt{3}; 3]$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ đạt khi $a = \sqrt{3}; b = c = 0$ và các hoán vị.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{14}{3}$ đạt khi $a = b = c = 1$ r

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = ab + bc + ca + \frac{4}{ab + bc + ca + 2}.$$

Hướng dẫn:

+ Đặt $t = ab + bc + ca$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t + 2}$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $a = \pm 1; b = c = 0$ và các hoán vị

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{7}{3}$ đạt khi $a = b = c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ r

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1 - 16abc}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức

$$P = \frac{3\sqrt[3]{abc} + 4abc}{1 + 4(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Hướng dẫn:

+ Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$ với $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

+ Xét hàm số $f(t) = \frac{3t + 4t^3}{2(1 - 8t^3)}$ với $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

+ Kết quả:

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{13}{28}$ đạt khi $a = b = c = \frac{1}{4}$ r

Bài 4. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Hướng dẫn:

+ Đặt $t = ab + bc + ca$ với $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$

+ Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$ với $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $a = 1; b = c = 0$ và các hoán vị $\mathbf{r}$

Bài 5. Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1)$ thỏa mãn $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

Hướng dẫn:

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in (0; 3)$

+ Xét hàm số $f(t) = -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$ với $t \in (0; 3)$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{3}{4}$ đạt khi $x = y = z = \frac{1}{2}$ $\mathbf{r}$

Bài 6. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 27$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2}(x+y+z)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{(x+y+z)^3} - 3(x+y+z)$$

Hướng dẫn:

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in [3\sqrt{3}; 9]$

+ Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} - 3t$ với $t \in [3\sqrt{3}; 9]$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{45}{2}$ đạt khi $x = y = z = 3$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{13}{28}$ đạt khi $x = 3\sqrt{3}, y = z = 0$ và các hoán vị $\mathbf{r}$

Bài 7. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{5}{(x+5y)(y+5z)(z+5x)}.$$

Hướng dẫn:

+ Đánh giá $P \geq 3(x+y+z) + \frac{5}{8(x+y+z)^3}$

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in (0; 1]$

+ Xét hàm số $f(t) = 3t + \frac{5}{8t^3}$ với $t \in (0; 1]$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{29}{8}$ đạt khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ **r**

Bài 8. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{9}{(x+y)(y+z)(z+x) + xyz}.$$

Hướng dẫn:

+ Đánh giá $P \geq x + y + z + \frac{27}{(x+y+z)^3}$

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in (0; 3]$

+ Xét hàm số $f(t) = 3t + \frac{9}{8t^2}$ với $t \in (0; 3]$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 4 đạt khi $x = y = z = 1$ **r**

Bài 9. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{3\sqrt{2}}{x+y+z}.$$

Hướng dẫn:

+ Đánh giá $P \geq xy + yz + zx + \frac{9\sqrt{2}}{(xy + yz + zx)^2}$

+ Đặt $t = xy + yz + zx$ với $t \in [3; +\infty)$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \frac{9\sqrt{2}}{t^2}$ với $t \in [3; +\infty)$

+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3 + \sqrt{2}$ đạt khi $x = y = z = 1$ **r**

Tài liệu tham khảo

[1] ThS. Nguyễn Sơn Hà – *Tạp chí Toán học trong nhà trường*. NXB XD.

[2] TS. Lê Xuân Sơn – ThS. Lê Khánh Hưng – *Phương pháp hàm số trong giải toán*. NXB ĐHQG HN.

[3] *Đề thi tuyển sinh đại học các năm qua*.

Huỳnh Chí Hào – THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp
Email: chihao@moet.edu.vn