

Trần Nam Dũng (chủ biên),
Nguyễn Tất Thu, Võ Quốc Bá Cẩn, Lê Phúc Lữ

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI VMO 2015

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 16 tháng 01 năm 2015

Các tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn:

1. **Trần Quốc Luật** (Giáo viên THPT Chuyên Hà Tĩnh, TP Hà Tĩnh).
2. **Nguyễn Văn Linh** (Sinh viên ĐH Ngoại Thương Hà Nội).
3. **Hoàng Đỗ Kiên** (Sinh viên ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội).
4. **Nguyễn Huy Tùng** (Sinh viên ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội).
5. **Trần Anh Hào** (Học sinh THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu, An Giang)
6. **Trần Phan Quốc Bảo** (Học sinh THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa)
7. **Trần Quốc Anh** (Học sinh THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

cùng nhiều giáo viên, học sinh và các bạn đam mê Toán khác đã đóng góp các nội dung, góp ý xây dựng quý báu cho tài liệu!

1. Đề thi

Ngày thi thứ nhất. (08/01/2015)

Bài 1. (5,0 điểm) Cho a là số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2 + a} \sqrt{u_n^2 + 3} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mọi $a \in [0; 1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài 2. (5,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c) \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq (a + b + c)^2.$$

Bài 3. (5,0 điểm) Cho số nguyên dương k . Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i. n chia hết cho 3;

ii. các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2, 0, 1, 5\}$.

Bài 4. (5,0 điểm) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O) , BC không là đường kính. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I .

a) Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại điểm D . Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

b) Giả sử (I) cắt cạnh BC tại hai điểm M, N . Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là các giao điểm của (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC . Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại điểm T (T cùng phía A đối với PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc $\angle MTN$ luôn đi qua một điểm cố định.

Ngày thi thứ hai. (09/01/2015)

Bài 5. (7,0 điểm) Cho $f_n(x)$ là dãy đa thức xác định bởi

$$f_0(x) = 2, f_1(x) = 3x, f_n(x) = 3xf_{n-1}(x) + (1 - x - 2x^2)f_{n-2}(x) \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $f_n(x)$ chia hết cho $x^3 - x^2 + x$.

Bài 6. (7,0 điểm) Với a, n là các số nguyên dương, xét phương trình $a^2x + 6ay + 36z = n$, trong đó x, y, z là các số tự nhiên.

- a)** Tìm tất cả các giá trị của a để với mọi $n \geq 250$, phương trình đã cho luôn có nghiệm tự nhiên (x, y, z) .
- b)** Biết rằng $a > 1$ và nguyên tố cùng nhau với 6. Tìm giá trị lớn nhất của n theo a để phương trình đã cho không có nghiệm (x, y, z) .

Bài 7. (6,0 điểm) Có m học sinh nữ và n học sinh nam ($m, n \geq 2$) tham gia một liên hoan song ca. Tại liên hoan song ca, mỗi buổi biểu diễn một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một số bài hát song ca nam – nữ mà trong đó, mỗi đôi nam – nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài. Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam – nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.

- a)** Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh X nếu như hủy tất cả các bài song ca mà X tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào X thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.
- b)** Chứng minh rằng ban tổ chức liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.

2. Nhận xét chung

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm học 2014-2015 (VMO 2015) diễn ra trong 2 ngày 08 và 09/01/2015. Về tổng quan, ta có thể thấy rằng đề thi năm nay hay, phù hợp với việc tuyển chọn học sinh giỏi.

Các vấn đề đặt ra trong đề khá căn bản, quen thuộc nhưng cũng có những khó khăn nhất định ở từng bài. Ví dụ bài tổ hợp khai thác chủ đề quen thuộc về các số chia hết cho 3 có các chữ số thuộc 1 tập hợp (dùng căn bậc 3 của đơn vị hoặc truy hồi), nhưng đưa chữ số 0 vào gây chút rắc rối. Bài 6 số học thì khai thác định lý Sylvester về biểu diễn dạng tổ hợp tuyến tính $ax + by$. Bài bất đẳng thức rất nhẹ nhàng (so với bất đẳng thức khủng năm ngoái), có thể giải bằng kiến thức THCS nhưng cũng gây khó cho không ít thí sinh.

Năm nay có một điểm đặc biệt là chỉ có một bài hình học, lại là bài khá khó nên có thể sẽ khiến một số bạn giỏi hình chưa có cơ hội bộc lộ hết sở trường của mình. Thay vào một bài hình là một bài tổ hợp dài, không quá khó về bản chất nhưng đòi hỏi khả năng đọc hiểu của thí sinh. Nhiều thí sinh đã chia sẻ rằng: *"Em không hiểu bài tổ hợp họ hỏi gì?"*. Quả thật, khả năng đọc hiểu, xây dựng và chuyển đổi mô hình là điểm yếu cố hữu của học sinh Việt Nam.

Đi vào chi tiết, ta có thể điểm qua từng bài như sau:

Ngày 1 khá cơ bản, gồm các vấn đề ít nhiều đều đã có giới thiệu trong chương trình Toán chuyên một cách đại trà.

- **Bài 1 (dãy số)** có câu a quá dễ và quen thuộc, câu b lại khó khăn kỹ thuật nhất định, cần sử dụng định lý kẹp, đơn điệu hoặc bổ đề ánh xạ co. Nhiều thí sinh bị lún sâu vào câu b của bài toán dẫn đến thiếu thời gian để giải quyết các câu còn lại.
- **Bài 2 (bất đẳng thức)** thì không quá dễ cũng không quá khó, nó là một bất đẳng thức đối xứng, đồng bậc, dạng tương đối phổ biến với các học sinh. Đổi biến để khử căn xong là có thể nhìn ngay ra bất đẳng thức Schur bậc 4 và AM-GM. Bài này có rất nhiều cách giải nên sẽ rất tiếc cho học sinh nào bỏ về sau, vì đây là về chính của bài toán. Đây là một bài toán khá hợp lý tương xứng với vị trí của nó trong đề thi.
- **Bài 3 (tổ hợp)** khai thác chủ đề quen thuộc (đã xuất hiện trong các đề thi Romania 2003, Phổ thông năng khiếu 2009, Lâm Đồng 2014). Có hơi rắc rối ở chỗ số 0 nhưng lại được "giải" bằng điều kiện $n < 10^k$ (chứ không phải có m chữ số). Phương pháp căn đơn vị giải quyết gọn nhưng cũng cần trình bày chặt chẽ. Phương pháp truy hồi sẽ gây khó một chút vì có đến 3 dãy. Ở bài này, có lẽ thí sinh làm trọn vẹn không nhiều, nhưng giám khảo chấm sẽ khá mệt.

- **Bài 4 (hình học phẳng)** là bài hình duy nhất, có hai câu đều ở mức độ trung bình khó, nhưng số học sinh làm trọn vẹn bài này sẽ không nhiều. Chủ đề về phương tích, trục đẳng phương vẫn đóng vai trò chủ đạo trong suốt các năm gần đây.

Ở ngày thi thứ hai, đề thi so với ngày đầu tiên đã "gây sốc", khó cả về kỹ thuật lẫn tư duy. Nguyên nhân là không có bài hình và bài tổ hợp phát biểu quá dài. Hai bài 5, 6 tuy quen thuộc nhưng lại là phần mà các thí sinh ít để ý. Về ý tưởng thì đề ngày 2 hay hơn.

- **Bài 5 (dãy số, đa thức)** tương đối cơ bản. Dùng phương trình đặc trưng hoặc quy nạp dễ dàng tìm được $f_n = (2x-1)^n + (x+1)^n$. Kiểu bài toán chia hết này khá giống với những bài chia hết trong số nguyên. Cách làm truyền thống là khai thác tính tuần hoàn của số dư. Tuy nhiên, thực tế nhiều thí sinh không có phương hướng gì.
- **Bài 6 (số học)** sẽ không khó khăn để làm nếu đã quen với định lý Sylvester. Có hai bài toán mẫu trước đó là IMO 1983 và Vietnam TST 2000. Cũng như các năm, bài số học ít khi xuất hiện, nhưng nếu có thì nó sẽ là một bài khó. Tuy nhiên, nếu chưa biết định hướng sử dụng định lý này thì đây quả là một thử thách thực sự.
- **Bài 7 (tổ hợp)** đề khá dài, quan hệ giữa các khái niệm khá rối và dễ dẫn đến hiểu nhầm. Học sinh cần chuyển về một mô hình toán học nào đó (bảng, graph hoặc hàm số) để thấy rõ hơn vấn đề. Thực ra về bản chất thì nó chỉ là một bài toán đếm có thể giải bằng song ánh và quy nạp.

Như vậy, nhìn chung thì đề năm nay hay. Ngày 1 ra thật cơ bản và quen để cho đại trà. Ngày 2 gây khó và phân loại. Qua khảo sát một số đội tuyển, thí sinh đánh giá đề này vừa sức và ít nhiều cũng giải quyết được một số nội dung trong đề bài. Dự đoán năm nay điểm đạt giải khuyến khích sẽ ở vào khoảng 13-15, còn điểm lọt vào vòng 2 để thi chọn đội tuyển IMO là 24. Năm nay chắc sẽ ít giải nhất.

Tài liệu này chúng tôi đã tổng hợp, biên tập lại từ nhiều nguồn, đặc biệt là mathscope.org để giới thiệu cho học sinh, thầy cô Chuyên Toán tham khảo. Do hoàn thành trong thời gian gấp rút và khối lượng tính toán lớn nên có thể còn nhiều sai sót. Mọi góp ý, thắc mắc xin gửi về các địa chỉ mail: trannamdung@yahoo.com, nguyentatthudn@gmail.com, babylearnmath@yahoo.com, lephuclu@gmail.com. Xin chân thành cảm ơn!

3. Lời giải chi tiết và bình luận

Bài toán 1. Cho a là số thực không âm và dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2 + a} \sqrt{u_n^2 + 3} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mọi $a \in [0; 1]$, chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải.

a) Với $a = 0$, ta có dãy số $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3}$ với $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} > 0, \forall x > 0.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ công thức truy hồi ta suy ra với mọi n thì

$$u_n > 0, u_{n+1} = f(u_n) \text{ và } u_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < u_1$$

nên bằng quy nạp ta suy ra được (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên nó có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim u_n = x$ thì $x \geq 0$ và là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy giới hạn cần tìm là $\lim u_n = 1$.

b) Với $a \in [0; 1]$ ta có $\frac{n^2}{4n^2+1} \leq \frac{n^2}{4n^2+a} \leq \frac{1}{4}$. Do đó

$$\frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2+1} \sqrt{u_n^2 + 3} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3}.$$

Xét hai dãy (x_n) và (y_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}\sqrt{x_n^2 + 3} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{n^2}{4n^2+1} \sqrt{y_n^2 + 3} \end{cases}$$

Theo kết quả câu a) ta có $\lim x_n = 1$.

Ta sẽ chứng minh $\lim y_n = 1$ và từ đó ta suy ra được $\lim u_n = 1$ và đó là điều cần chứng minh. Dưới đây ta sẽ nêu hai cách để xử lý giới hạn này.

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(y_n - 1) + \frac{n^2}{4n^2 + 1} \frac{(y_n - 1)(y_n + 1)}{\sqrt{y_n^2 + 3} + 2} + \frac{2n^2}{4n^2 + 1} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(y_n - 1) + \frac{n^2}{4n^2 + 1} \frac{(y_n - 1)(y_n + 1)}{\sqrt{y_n^2 + 3} + 2} - \frac{1}{2(4n^2 + 1)} \\
 &< \frac{1}{2}(y_n - 1) + \frac{n^2}{4n^2 + 1} \frac{(y_n - 1)(y_n + 1)}{\sqrt{y_n^2 + 3} + 2} \\
 &= (y_n - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{n^2}{4n^2 + 1} \frac{y_n + 1}{\sqrt{y_n^2 + 3} + 2} \right)
 \end{aligned}$$

Dễ thấy

$$0 < \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4n^2 + 1} \frac{y_n + 1}{\sqrt{y_n^2 + 3} + 2} < \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4n^2 + 1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$

• Nếu $y_n > 1$ với mọi n thì ta có $|y_{n+1} - 1| < \frac{3}{4}|y_n - 1| < \dots < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|y_1 - 1|$.

Từ đó, suy ra $\lim y_n = 1$.

• Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $y_{n_0} \leq 1$ thì ta có $y_n < 1, \forall n > n_0$.

Nếu tồn tại $N > n_0$ sao cho $y_{N+1} > y_N$, khi đó do $f(x) = \frac{x^2}{4x^2 + 1}$ là một hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên ta có

$$\frac{(N+1)^2}{4(N+1)^2 + 1} > \frac{N^2}{4N^2 + 1}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}y_{N+1} + \frac{(N+1)^2}{4(N+1)^2 + 1} \sqrt{y_{N+1}^2 + 3} > \frac{1}{2}y_N + \frac{N^2}{4N^2 + 1} \sqrt{y_N^2 + 3}$$

hay $y_{N+2} > y_{N+1}$.

Do đó, bằng quy nạp ta chứng minh được dãy (y_n) tăng từ số hạng thứ N trở đi. Do đó, dãy (y_n) hội tụ. Đặt $\lim y_n = y$ ta tìm được $y = 1$.

Nếu (y_n) là dãy giảm kể từ số hạng thứ n_0 trở đi, kết hợp với dãy (y_n) bị chặn dưới bởi 0 ta suy ra dãy (y_n) hội tụ. Đặt $\lim y_n = y$ ta tìm được $y = 1$ nên trường hợp này loại.

Vậy $\lim y_n = 1$ và bài toán được chứng minh.

Cách 2. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $y_n \geq 1 - \frac{2}{n}$ với mọi $n \geq 2$. (*)

Thật vậy, với $n = 2$, dễ dàng thấy rằng (*) đúng.

Giả sử (*) đúng với $n \geq 2$ thì ta có $y_n \geq 1 - \frac{2}{n} \geq 0$. Suy ra

$$\frac{1}{2}y_n + \frac{n^2}{4n^2+1}\sqrt{y_n^2+3} \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{n^2}{4n^2+1}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 + 3}.$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{n^2}{4n^2+1}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 + 3} \geq 1 - \frac{2}{n+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{n^2}{4n^2+1}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 + 3} \geq \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{2n}{4n^2+1}\sqrt{n^2 - n + 1} \geq \frac{n^2 - n + 2}{2n(n+1)} \\ \Leftrightarrow & 4n^2(n+1)\sqrt{n^2 - n + 1} \geq (4n^2+1)(n^2 - n + 2) \\ \Leftrightarrow & 16n^4(n+1)^2(n^2 - n + 1) \geq (4n^2+1)^2(n^2 - n + 2)^2 \end{aligned}$$

Ta thấy bất đẳng thức trên đúng với $n = 2, 3$, ta xét $n \geq 4$. Chú ý rằng

$$16n^2(n+1)^2 \geq (4n^2+1)^2 \Leftrightarrow 4n(n+1) \geq 4n^2+1, \text{ đúng và}$$

$$n^2(n^2 - n + 1) \geq (n^2 - n + 2)^2 \Leftrightarrow n(n-2)^2 \geq 4 \text{ cũng đúng với mọi } n \geq 4.$$

Từ đó ta được $x_n \geq u_n \geq 1 - \frac{2}{n}$ đúng với mọi n , mà $\lim x_n = \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$ nên ta có $\lim u_n = 1$. $\square$

Nhận xét. Ý thứ nhất của bài toán rất cơ bản, thuộc dạng mẫu mực và là nội dung quen thuộc của phần lý thuyết giới hạn dãy số mà hầu hết các học sinh đã được giới thiệu. Ta chỉ cần chứng minh dãy số giảm bằng quy nạp là coi như bài toán được giải quyết xong.

Tuy nhiên, ý thứ hai khá mới lạ và có thể coi đây là câu khó nhất trong ngày thi đầu tiên. Việc đánh giá dãy (u_n) kẹp giữa hai dãy (x_n) và (y_n) là suy nghĩ rất tự nhiên. Từ kết quả câu a, ta thấy rằng $\lim x_n = 1$ nên ta suy nghĩ đến việc chứng minh $\lim y_n = 1$ để có được giới hạn. Để làm được điều này, ta đi chứng minh dãy (y_n) là dãy giảm và bị chặn dưới.

Do $2(y_{n+1} - y_n) = \frac{2n^2}{4n^2+1}\sqrt{y_n^2+3} - y_n$ nên để có (y_n) giảm thì ta cần có $y_n^2 \geq \frac{12n^4}{12n^4+8n^2+1}$.

Tuy nhiên, không suôn sẻ như vậy, việc chứng minh tính chất này quá khó do phải thực hiện quy nạp với biểu thức phức tạp. Còn nếu chứng minh dãy này bị chặn dưới bởi 1 thì cũng quy nạp không thành công bởi hệ số biến thiên theo n gây ra khá nhiều rắc rối.

Điều này gợi ý cho ta một đánh giá nhẹ nhàng hơn là $y_n \geq 1 - \frac{k}{n}$ với k dương nào đó. Để thực hiện được quy nạp, ta cần có đánh giá

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{k}{2}}{2} + \frac{n^2}{4n^2 + 1} \sqrt{3 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} &\geq 1 - \frac{k}{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2}{4n^2 + 1} \sqrt{3 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} &\geq \frac{n^2 - 2kn + n + k}{2n(n+1)}. \end{aligned}$$

Xét với $k = 1$, ta thấy bất đẳng thức trên chính là

$$56n^7 - 52n^6 + 48n^5 - 37n^4 + 18n^3 - 11n^2 + 2n - 1 \geq 0, \text{ đúng do } n \geq 1.$$

Trong lời giải theo cách 2, ta đã sử dụng đánh giá dạng trên với $k = 2$.

Dưới đây là một số bài toán tương tự:

Bài 1. (Đề chọn đội tuyển ĐHSPT 2010) Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1, \\ x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Gợi ý. Ta đánh giá $|x_n| < \frac{1}{n}, n \geq 5$.

Bài 2. (VMO 2012) Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Gợi ý. Chứng minh dãy giảm trực tiếp hoặc đánh giá $x_n > 1 + \frac{3}{n}$ với $n \geq 2$.

Bài 3. (Hưng Yên, 2011) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a > 0, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị a sao cho dãy số có giới hạn hữu hạn.

Gợi ý. Ta chứng minh rằng $\frac{1}{x_n + n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{a \cdot n(n+1)}}$.

Nói chung, cách đánh giá các dãy số thông qua một hàm biến thiên theo n không phải quá mới mẻ và khá phổ biến trong các bài dãy số có hệ số thay đổi theo n hoặc là tổng của nhiều số hạng của dãy.

Ngoài ra, ta có thể tiếp cận bài này theo kiểu dùng để chứng minh các dãy nghiệm của phương trình thông qua điểm bất động. Dưới đây là một cách như thế:

Đặt $f_n(x) = \frac{x}{2} + \frac{n^2}{4n^2+a} \sqrt{x^2+3}$ với $n \geq 1$ và $x > 0$.

Rõ ràng hàm số có điểm bất động duy nhất là

$$a_n = \sqrt{\frac{3}{(2 + \frac{a}{2n^2})^2 - 1}}$$

Nếu $x > a_n$ thì $f_n(x) > a_n$ và ngược lại, nếu $0 < x < a_n$ thì $f_n(x) < a_n$. Ngoài ra, ta thấy rằng a_n xác định như trên tăng ngặt và có giới hạn 1.

Xét dãy số (u_n) , nếu tất cả các số hạng đều lớn hơn 1 thì $u_n^2 + 3 < 4u_n^2$ nên suy ra

$$u_{n+1} < \frac{1}{2}u_n + \frac{4n^2}{4n^2+1} \sqrt{4u_n^2} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \cdot 2u_n = u_n.$$

Do đó, dãy u_n giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn.

Ngược lại, nếu tồn tại m sao cho $u_m < 1$ thì giả sử m đó là số nhỏ nhất thì từ đó trở đi, tất cả các số hạng của (u_n) đều nhỏ hơn 1 vì

$$u_{m+1} = \frac{1}{2}u_m + \frac{n^2}{4n^2+a} \sqrt{u_m^2+3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{1+3} = 1.$$

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một chỉ số N nào đó mà từ đó trở đi, dãy số này tăng.

Vì $u_m < 1$ nên tồn tại N sao cho $u_m < a_N < 1$. Do dãy a_n tăng nên ta có thể chọn N sao cho $N > m$. Chú ý rằng hàm $\frac{x^2}{4x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên

$$u_{m+1} = \frac{u_m}{2} + \frac{m^2}{4m^2+1} \sqrt{u_m^2+3} < \frac{a_N}{2} + \frac{N^2}{4N^2+1} \sqrt{a_N^2+3} = a_N$$

tức là $u_{m+1} < a_N$. Từ đó quy nạp được các số hạng $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{N-1}, u_N$ đều bé hơn a_N và cũng có $u_{N+1} < a_N$.

Do đó, ta được $u_{N+1} < a_N < a_{N+1}$. Tương tự, ta cũng có $u_{N+k} < a_{N+k}$ với mọi $k \geq 0$. Ngoài ra, vì $u_{N+k} < a_{N+k}$ nên $f_{N+k}(u_{N+k}) > u_{N+k}$, tức là $u_{N+k+1} > u_{N+k}$. Suy ra dãy (u_n) tăng ngặt kể từ 1 và nó bị chặn trên bởi 1 nên có giới hạn. Chứng minh kết thúc.

Ta thấy rằng cách lập luận chia trường hợp trên cũng khá thú vị, nó cũng tương tự cách 1 của lời giải đã được giới thiệu. Tuy nhiên, điểm mạnh của lời giải này là nó không phụ thuộc vào giá trị $a \in [0; 1]$ nên có thể thấy rằng bài toán vẫn đúng với mọi a không âm. Ngoài ra, nó cho ta một cách đánh giá nhẹ nhàng hơn khi khảo sát tính hội tụ của dãy nhờ ý tưởng: dù chưa biết tính biến thiên của dãy cụ thể như thế nào, ta cứ thử xét mọi

tình huống: nếu rơi vào trường hợp thuận lợi thì tốt; nhưng nếu không thuận lợi thì bằng các lập luận thích hợp, ta vẫn chứng minh được; suy ra nó luôn đúng trong mọi trường hợp.

Lập luận này đã từng được dùng để giải quyết bài toán khá thú vị sau:

Bài 4. (VMO bảng A, 2005) Xét dãy số thực (x_n) xác định bởi công thức

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Xác định tất cả các giá trị a sao cho dãy số trên có giới hạn hữu hạn và trong từng trường hợp, hãy xác định giới hạn đó.

Bài toán 2. Cho các số thực $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

Lời giải. Về trái của bất đẳng thức khá đơn giản. Dạng phát biểu của nó với tổng các bình phương gợi cho ta nghĩ đến đồng nhất thức Lagrange – một hằng đẳng thức quen thuộc được dùng để chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0.$$

Cụ thể hơn, ta có đẳng thức sau:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Do đó, bất đẳng thức về trái có thể được viết dưới dạng:

$$(a + b + c)^2 \geq (a + b + c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Đến đây thì có lẽ bạn nào cũng sẽ nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (áp dụng cho $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$ và $z = \sqrt{c}$) để hoàn tất phép chứng minh.

Ở đây, ta sẽ dành sự quan tâm nhiều hơn cho bất đẳng thức về phải. Nhận xét ban đầu cho thấy đây là một bất đẳng thức tương đối chặt vì dấu bằng xảy ra tại hai trường hợp $a = b = c$ và $a = b, c = 0$ (cùng các hoán vị tương ứng). Do đó, ta cần phải rất cẩn trọng trong các đánh giá của mình.

Ngoài ra, ta cũng thấy rằng chỗ khó của bài toán chính là ở các căn thức. Nếu ta có thể phá được dấu căn đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn thì chắc chắn bài toán cũng sẽ trở nên sáng sủa hơn. Đến đây, có hai ý tưởng chính như sau:

1. *Đặt ẩn phụ để khử căn:* Đây là một hướng đi khá tự nhiên vì các căn thức ở đây cũng đơn giản, các biểu thức dưới dấu căn chỉ có dạng bậc một. Do đó, chỉ cần một lần đặt ẩn phụ $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ là ta có thể khử được hết các căn thức và đưa về xét một bất đẳng thức thuần nhất bậc 4 đối với x, y, z . Bậc của bất đẳng thức mới cũng không quá cao nên đây là hướng đi hoàn toàn khả thi.
2. *Sử dụng đánh giá để khử căn:* Đây là ý tưởng thường thấy khi xử lý các bài toán có căn. Vấn đề được đặt ra ở đây là ta phải lựa chọn đánh giá đủ chặt sao cho các điều kiện dấu bằng phải được đảm bảo.

Các hướng tiếp cận được trình bày dưới đây hầu hết đều sử dụng hai ý tưởng trên làm tư tưởng chủ đạo.

Cách 1. Khai triển trực tiếp.

Đây có lẽ là hướng đi tự nhiên nhất cho bài toán này. Ta chỉ việc đặt $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ rồi nhân tung hết ra. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng:

$$\sum x^4 + xyz \sum x + \sum xy(x^2 + y^2) \geq 4 \sum x^2 y^2. \quad (1)$$

Đến đây, nếu bạn nào có tìm hiểu sẽ nghĩ ngay đến bất đẳng thức Schur bậc 4:

$$x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-z)(y-x) + z^2(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Dạng khai triển của nó chính là:

$$\sum x^4 + xyz \sum x \geq \sum xy(x^2 + y^2). \quad (2)$$

Sự tương đồng giữa hai bất đẳng thức (1) và (2) gợi cho ta nghĩ đến việc dùng (2) để đánh giá cho (1). Ngoài ra, (2) cũng có dấu bằng tại $x = y = z$ và $x = y$, $z = 0$ (cùng các hoán vị) tương ứng với trường hợp đẳng thức của (1). Do đó, đây sẽ là một đánh giá khá ổn và ta có thể yên tâm về độ an toàn của nó. Thật vậy, sau khi đánh giá, ta chỉ cần xét bất đẳng thức:

$$2 \sum xy(x^2 + y^2) \geq 4 \sum x^2 y^2 \Leftrightarrow \sum xy(x^2 + y^2) \geq 2 \sum x^2 y^2$$

và nó chỉ là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM:

$$\sum xy(x^2 + y^2) \geq \sum (xy \cdot 2xy) = 2 \sum x^2 y^2. \quad \square$$

Lời bình. Đặt ẩn phụ là một trong những kỹ năng cơ bản cần có trong bất đẳng thức. Nhiều bài toán có hình thức công kênh phức tạp, tuy nhiên sau những bước đặt ẩn phụ đơn giản, ta có thể đưa bài toán trở về dạng mới mà ở đó nhiều ý tưởng (mà trong đó cũng có thể là gốc của bài toán) sẽ được phơi bày ra.

Có nhiều kiểu đặt ẩn phụ, trong đó có ba kiểu sau rất thông dụng: Đặt ẩn phụ để làm đơn giản hình thức bài toán, đặt ẩn phụ để thuận nhất hóa hoặc đối xứng hóa, và đặt ẩn phụ lượng giác dựa vào dấu hiệu từ điều kiện giả thiết.

Cách 2. Phương pháp SOS.

Đây là hướng đi tự nhiên thứ hai sau phương pháp khai triển. Trước hết, ta cũng sẽ đặt ẩn phụ x , y , z như hướng 1 ở trên để khử căn tiện cho việc quan sát. Ta đưa bài toán về chứng minh:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) + \sum (x^2 - y^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Trong bất đẳng thức trên, có hai số hạng cùng chứa nhân tử $x^2 + y^2 + z^2$. Một cách tự nhiên, ta nghĩ đến việc ghép hai số hạng đó với nhau. Lúc này, bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\sum (x^2 - y^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Sự xuất hiện của tổng bình phương $\sum (x^2 - y^2)^2$ bên vế trái và phân tích đã quá quen thuộc:

$$\sum x^2 - \sum xy = \frac{1}{2} \sum (x - y)^2$$

gọi cho ta nghĩ ngay đến việc dùng phương pháp phân tích bình phương SOS để xử lý bài toán. Cụ thể, ta viết được bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 \geq 0,$$

trong đó $S_x = f(x, y, z) = 2(y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = y^2 + z^2 + 4yz - x^2$, còn $S_y = f(y, z, x)$, $S_z = f(z, x, y)$ được định nghĩa tương tự.

Đến đây, ta chỉ việc sử dụng các tiêu chuẩn của phương pháp là được. Giả sử $x \geq y \geq z$, khi đó ta có

$$S_y = z^2 + x^2 + 4zx - y^2 \geq 0, \quad S_z = x^2 + y^2 + 4xy - z^2 \geq 0$$

và

$$S_x + S_y = 2z^2 + 4zx + 4yz \geq 0.$$

Do $x - z \geq y - z \geq 0$ nên $(z - x)^2 \geq (y - z)^2$. Từ đó suy ra

$$S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 \geq (S_x + S_y)(y - z)^2 \geq 0. \quad \square$$

Lời bình. Một điều cần chú ý là khi sử dụng phương pháp SOS, các bạn cần phải chứng minh lại các tiêu chuẩn của nó. Nhiều bạn cầu thả chỉ ghi gọn là $S_x + S_y \geq 0$, $S_y + S_z \geq 0$ rồi suy ra điều phải chứng minh. Như thế là chưa được.

Ngoài cách sử dụng các tiêu chuẩn SOS như trên, ta cũng có cách biến đổi mà không phải sử dụng tiêu chuẩn nào dựa trên đồng nhất thức đơn giản:

$$\sum (x - y)^2(x - z)(y - z) = 0. \quad (3)$$

Có thể thấy điểm mâu chốt gây khó khăn trong việc xử lý tổng:

$$\sum (x - y)^2(x^2 + y^2 + 4xy - z^2) \geq 0$$

chính là phần số âm ở mỗi số hạng, chẳng hạn như $-z^2$ trong số hạng $(x - y)^2(x^2 + y^2 + 4xy - z^2)$. Nếu ta đem cộng với tổng $\sum (x - y)^2(x - z)(y - z)$ với một số lượng thích hợp vào sẽ làm tăng số lượng z^2 lên ở số hạng này

và rất có thể sẽ thu được một đại lượng không âm. Cụ thể, ta hy vọng sẽ có số k sao cho:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4xy - z^2 + k(x - z)(y - z) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x + y)^2 + (2 + k)xy - kz(x + y) + (k - 1)z^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Quan sát một chút, cho thể thấy ngay nếu chọn $k = 2$ thì ta sẽ viết được biểu thức $(x + y)^2 - kz(x + y) + (k - 1)z^2$ dưới dạng bình phương. Từ đó, ta thu được một lời giải ngắn gọn thú vị sau: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum (x - y)^2(x^2 + y^2 + 4xy - z^2) + 2 \sum (x - y)^2(x - z)(y - z) \geq 0,$$

hay

$$\sum (x - y)^2[(x + y - z)^2 + 4xy] \geq 0.$$

Đồng nhất thức (3) đã giúp chúng ta xử lý được bài toán theo một lối SOS rất thú vị để đưa đến một bất đẳng thức hiển nhiên. Đây cũng là một kinh nghiệm của chúng tôi tích lũy được khi tìm hiểu về phương pháp SOS. Tất nhiên, đồng nhất (3) chỉ hiệu quả ở các bất đẳng thức đối xứng bậc 4. Với các bất đẳng thức bậc cao, chúng ta cần một đồng nhất thức tổng quát hơn để tăng cường tính hiệu quả. Chúng ta có một kết quả thú vị sau (bạn đọc có thể tự chứng minh): Cho $f(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng với hai biến x, y . Khi đó, ta có thể phân tích:

$$\sum [(x - y)^2(x - z)(y - z) \cdot f(x, y, z)] = (x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2 \cdot g(x, y, z)$$

trong đó $g(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng với ba biến x, y, z .

Nhờ vào đồng nhất thức trên mà chúng tôi đã xử lý thành công rất nhiều bất đẳng thức bằng phương pháp SOS rất đơn giản chứ không cần phải dùng tiêu chuẩn phức tạp nào.

Cách 3. Đánh giá khử căn.

Một hướng đi khác thay cho đặt ẩn phụ là tìm cách đánh giá phá căn thức. Cụ thể, ta sẽ tìm các đánh giá thích hợp cho $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$ với chiều $\geq$ để phá dấu căn. Thường thì với các dạng căn tích như thế này, cách phá căn thông dụng là sử dụng bất đẳng thức AM-GM. Tuy nhiên, ở bài toán này, nó lại cho đánh giá với chiều ngược lại:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}, \quad \sqrt{bc} \leq \frac{b + c}{2}, \quad \sqrt{ca} \leq \frac{c + a}{2}$$

không phải chiều ta cần. Có cách nào để điều chỉnh không nhỉ?

Một ý tưởng thú vị ở đây là sử dụng nghịch đảo. Như đã biết, với bất đẳng thức dương thì nghịch đảo của nó sẽ đảo chiều. Do đó, ta có thể nghĩ đến việc viết $\sqrt{ab}$ thành $\frac{ab}{\sqrt{ab}}$ rồi đánh giá:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}. \quad (4)$$

Như vậy là sẽ phá được căn thức với chiều ta muốn. Tuy nhiên, một điều cần lưu ý ở đây là số 0 không có nghịch đảo. Thế nên nếu một trong các căn thức có một số bằng 0 thì ta không thể dùng cách này được. Do đó, cần phải xét trường hợp để loại trừ tình huống ngoài ý muốn này.

Nếu trong a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $c = 0$, thì bất đẳng thức cần chứng minh sẽ trở thành:

$$(a+b)\sqrt{ab} + (a-b)^2 + a^2 + b^2 \geq (a+b)^2.$$

Công việc ở đây là khá đơn giản vì ta đã có $(a+b)\sqrt{ab} \geq 2ab$.

Tiếp theo, ta xét trường hợp $a, b, c > 0$. Lúc này, ta đã có thể sử dụng được (4). Bài toán được đưa về chứng minh

$$2\left(\sum a\right)\left(\sum \frac{ab}{a+b}\right) + \sum (a-b)^2 \geq \left(\sum a\right)^2.$$

Sau khi thu gọn, nó có dạng:

$$2\left(\sum a\right)\left(\sum \frac{ab}{a+b}\right) \geq 4\sum ab - \sum a^2.$$

Vì $a+b+c$ có thể tách ra các đại lượng $a+b, b+c, c+a$ liên quan đến mẫu của các số hạng của tổng $\sum \frac{ab}{a+b}$ nên ta có thể xử lý rút gọn về trái theo cách sau:

$$\begin{aligned} VT &= 2\sum \frac{ab(a+b+c)}{a+b} = 2\sum ab\left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \\ &= 2\sum ab + 2abc\sum \frac{1}{a+b}. \end{aligned}$$

Khi đó, bất đẳng thức có thể viết lại thành:

$$2abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Đến đây thì ý tưởng tự nhiên là sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu để làm giảm số lượng các phân thức:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

và đưa bài toán về xét một bất đẳng thức mới:

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Tuy nhiên, đây chính là bất đẳng thức Schur bậc ba. □

Lời bình. Ở đây, chúng tôi muốn chú ý với các bạn về cách tách các tích ab, bc, ca, abc được sử dụng trong lời giải trên.

Như ta đã biết, những bất đẳng thức mà trong các trường hợp dấu bằng của chúng có trường hợp không tại tâm thì thường khó đánh giá hơn các bất đẳng thức bình thường. Nguyên nhân là ở các bộ hoán vị. Một bất đẳng thức đối xứng (hoặc hoán vị) nếu có dấu bằng tại bộ (A, B, C) thì cũng sẽ đạt được dấu bằng tại các hoán vị của nó là (B, C, A) và (C, A, B) . Do đó, để đánh giá thành công thì ta phải tìm được một đánh giá sao cho nó đảm bảo được cả ba trường hợp. Rõ ràng rất khó!

Đối với các bài toán có dấu bằng tại biên thì cách tách trên cho ta một kỹ thuật xử lý đặc biệt hiệu quả. Thật vậy, giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $f(a, b, c) \geq 0$ với dấu bằng là $a = kb$ ($k \neq 0$), $c = 0$ (và các hoán vị) chẳng hạn (ở đây chỉ xin lấy ví dụ một trường hợp cụ thể để phân tích, còn nhiều trường hợp khác cũng có thể xử lý tương tự). Khi đó, nếu viết được bất đẳng thức trên dưới dạng:

$$ab \cdot g(a, b, c) + bc \cdot g(b, c, a) + ca \cdot g(c, a, b) \geq 0$$

thì ta chỉ cần quan tâm đánh giá biểu thức đại diện $g(a, b, c)$ theo dấu bằng $a = kb, c = 0$ là đủ mà không cần chú ý nhiều đến các hoán vị của bộ này. Nếu đánh giá thành công thì sau khi nhân thêm ab vào hai vế, ta sẽ thu được một đánh giá cho số hạng $ab \cdot g(a, b, c)$ với dấu bằng xảy ra tại $ab = 0$ và $a = kb, c = 0$. Hiển nhiên đánh giá này sẽ đảm bảo được cả ba trường hợp hoán vị của $a = kb, c = 0$.

Từ đây, ta thấy rằng các điều kiện sẽ càng thuận lợi hơn nếu ta tách ra được số hạng có dạng $abc \cdot h(a, b, c)$. Lúc này, $h(a, b, c)$ có thể được đánh giá khá là “vô tư”, bởi lẽ tại trường hợp biên thì tích abc đã bằng 0 mất rồi, thế nên khi nhân vào thì kiểu gì cũng đảm bảo được dấu bằng biên.

Cách 4. Sử dụng hàm lồi.

Chắc hẳn bạn đọc yêu Toán đều biết đến tính chất thú vị sau của hàm lồi: *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lồi trên đoạn $[a, b]$ thì giá trị lớn nhất của nó sẽ đạt được một trong hai điểm $x = a$ hoặc $x = b$, còn đối với hàm lõm thì sẽ là giá trị nhỏ nhất.*

Thế nhưng, lại không có nhiều bạn nghĩ đến việc sử dụng tính chất này vào giải toán. Một trong những nguyên nhân có lẽ là ở tính chất của hàm

lỗi. Như ở trên đã đề cập, hàm lỗi sẽ đạt cực đại tại biên và hàm lõm sẽ đạt cực tiểu tại biên. Nhưng ở bài toán này thì lại không có biên rõ ràng, các biến có biên dưới nhưng lại không có biên trên.

Một điều nữa cũng cần phải nói đến là hầu hết các bạn học sinh đều chỉ có tầm nhìn “vĩ mô” mà chưa có đến cái nhìn “vi mô”. Có nghĩa là đề bài cho bất đẳng thức bao nhiêu biến thì các bạn chỉ nhìn bằng đúng bấy nhiêu biến chứ không nghĩ đến tầm nhìn khác đi. Đó là một tầm nhìn sai lầm. Trên thực tế, để có được lời giải thành công thì ta nên bắt đầu bằng những thứ nhỏ nhất nhất, chú ý đến mọi khía cạnh.

Bất đẳng thức đã cho có dạng đối xứng với ba biến a, b, c , thế thì nó cũng là bất đẳng thức đối xứng với hai biến bất kỳ nào đó trong ba biến trên. Chấn hấn các bạn vẫn còn nhớ chúng ta đã học từ cấp 2 rất nhiều rằng các bài toán đối xứng hai ẩn có thể được xử lý hiệu quả bằng phép đặt ẩn phụ tổng-tích $S = x + y, P = xy$ nhờ vào quan hệ của chúng: $S^2 \geq 4P$.

Cụ thể hơn, nếu ta cố định c thì bất đẳng thức sẽ có dạng đối xứng với a và b . Khi đó, nhờ phép đặt $S = a + b, P = ab$, ta có thể chuyển bất đẳng thức về dạng:

$$g(S, P) \geq 0.$$

Khi đó, nếu ta cố định S nữa thì đây sẽ chỉ còn là một bất đẳng thức với một biến là P và lúc này P đã được chặn miền với đủ biên trên lẫn biên dưới là $[0, \frac{S^2}{4}]$.

Đến đây, nếu ta có thể suy xét được tính đơn điệu hoặc tính lõm của $g_P(S, P)$ thì cũng có thể đưa ra được kết luận về tính chất các cực trị của nó để rồi từ đó đi đến lời giải.

Lời giải chi tiết theo hướng này như sau: Đặt $f(a, b, c) = VT - VP$. Khi đó, ta phải chứng minh $f(a, b, c) \geq 0$. Cố định c và $S = a + b$. Đặt $P = ab$ thì ta có $0 \leq P \leq \frac{S^2}{4}$. Ta có biến đổi:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

và $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 - (a + b + c)^2 = h(P)$, trong đó $h(P)$ là một biểu thức bậc nhất của P . Do đó:

$$f(a, b, c) = (S + c) \left(\sqrt{P} + \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \right) + h(P) = g(P).$$

Nếu cả hai số a, b đều bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng nên ta chỉ cần xét trường hợp $S > 0$ là đủ (lý luận này là để đảm bảo khoảng $(0, \frac{S^2}{4})$ tồn tại, đảm bảo cho việc xét đạo hàm của $g(P)$). Dễ thấy hàm số $g(P)$ liên tục trên $[0, \frac{S^2}{4}]$. Ngoài ra, với mỗi $P \in (0, \frac{S^2}{4})$, ta tính được:

$$g'(P) = (S + c) \left(\frac{1}{2\sqrt{P}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{P}}}{2\sqrt{S + 2\sqrt{P}}} \right) + k$$

trong đó k là hệ số cao nhất của $h(P)$. Rõ ràng $g'(P)$ là hàm giảm ngặt trên $(0, \frac{S^2}{4})$ nên $g(P)$ là hàm lõm trên $[0, \frac{S^2}{4}]$. Từ đó suy ra

$$g(P) \geq \min \left\{ g(0), g\left(\frac{S^2}{4}\right) \right\}, \quad \forall P \in \left[0, \frac{S^2}{4}\right].$$

Như thế, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh $g(0) \geq 0$ và $g(\frac{S^2}{4}) \geq 0$. Mặt khác, ta lại dễ thấy:

$$g(0) = f(S, 0, c), \quad g\left(\frac{S^2}{4}\right) = f\left(\frac{S}{2}, \frac{S}{2}, c\right).$$

Do đó, từ những lý luận ở trên, có thể thấy rằng ta chỉ cần xét bất đẳng thức tại hai trường hợp: có một số bằng 0 hoặc có hai số bằng nhau, là đủ. Ở hướng 3, ta đã chứng minh được bất đẳng thức đúng tại trường hợp thứ nhất. Như vậy, ta chỉ còn phải kiểm tra trường hợp thứ hai nữa là được.

Giả sử $a = b$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành

$$(2a + c)(a + 2\sqrt{ac}) + 2(a - c)^2 \geq (2a + c)^2.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta phải chứng minh

$$4a\sqrt{ac} + 2c\sqrt{ac} + c^2 \geq 7ac.$$

Vế lớn có dạng tổng, còn vế bé có dạng tích gợi cho ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức AM-GM để đánh giá:

$$4a\sqrt{ac} + 2c\sqrt{ac} + c^2 \geq 7\sqrt[7]{(a\sqrt{ac})^4 (c\sqrt{ac})^2 c^2} = 7ac. \quad \square$$

Lời bình. Bằng cách sử dụng hàm lồi và bất đẳng thức Karamata¹, ta sẽ có thêm cách nhìn nhận tổng quan hơn cho nhiều vấn đề, nắm bắt được bản chất tốt hơn. □

¹Bất đẳng thức Karamata được xây dựng dựa trên khái niệm bộ trội và tính chất tiếp tuyến của hàm lồi:

Cho hai bộ số không tăng $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, trong đó a_i, b_i đều cùng thuộc vào một miền $\mathbb{I}$. Ta nói rằng A trội hơn B , ký hiệu $A \succ B$, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn đồng thời:

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

Lúc này, nếu $f(x)$ là một hàm khả vi bậc hai và lồi trên $\mathbb{I}$ thì:

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n).$$

Nhận xét. Qua tìm hiểu và nghiên cứu tài liệu, chúng tôi suy đoán rằng bài toán này có xuất xứ từ bài toán sau đây: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + (b - c)^2} + \sqrt{b + (c - a)^2} + \sqrt{c + (a - b)^2} \geq \sqrt{3}. \quad (8)$$

Tất nhiên, đây chỉ là những suy đoán có tính chủ quan, nhưng nếu suy xét kỹ, các bạn sẽ thấy bài VMO 2015 chính là một mẫu chốt quan trọng trong chứng minh bất đẳng thức (8). Thật vậy, bình phương hai vế của (8), ta thấy nó tương đương với

$$2 \sum \sqrt{[a + (b - c)^2][b + (a - c)^2]} + \sum (a - b)^2 \geq 2.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \sum \sqrt{[a + (b - c)^2][b + (a - c)^2]} &\geq \sum [\sqrt{ab} + (a - c)(b - c)] \\ &= \sum \sqrt{ab} + \sum (a - c)(b - c) \\ &= \sum \sqrt{ab} + \frac{1}{2} \sum (a - b)^2. \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh (8), ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum \sqrt{ab} + \sum (a - b)^2 \geq 1,$$

hay

$$\left(\sum a \right) \left(\sum \sqrt{ab} \right) + \sum (a - b)^2 \geq \left(\sum a \right)^2.$$

Đây chính là bất đẳng thức vế phải trong bài số 2 của đề VMO năm nay. Còn về trái có lẽ tác giả đã đặt thêm ra với mục đích “gỡ điểm” cho các thí sinh tham dự kỳ thi.

Nói riêng về bất đẳng thức (8), nó cũng có một xuất xứ rất thú vị... từ hình học. Chính xác hơn là từ sự tương tự hóa một bất đẳng thức về đường trung tuyến của tam giác. Ta biết rằng, trong một tam giác với độ dài ba cạnh là a, b, c thì:

$$m_a + m_b + m_c \leq 2p.$$

Xét các tam giác có nửa chu vi $p = 1$. Đặt $a = y + z$, $b = z + x$ và $c = x + y$ với $x, y, z > 0$. Khi đó, ta có $x + y + z = 1$ và:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{2(z + x)^2 + 2(x + y)^2 - (y + z)^2}{4} \\ &= x(x + y + z) + \frac{(y - z)^2}{4} = x + \frac{(y - z)^2}{4}. \end{aligned}$$

Từ phép biến đổi này, ta thu được bất đẳng thức

$$\sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{4}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{4}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{4}} \leq 2.$$

Có thể thấy bất đẳng thức (8) chính là một sự tương tự hóa bằng cách thay đổi hệ số của các bình phương dưới dấu căn.

Như đã đề cập, ở phần cuối này, chúng tôi xin được đề xuất một tổng quát cho bất đẳng thức về phải trong đề VMO năm nay như sau (trường hợp bài VMO chính là ứng với $n = 3$):

Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Xét n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{x_i x_j} \right) + (n-2) \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Bài toán 3. Cho số nguyên dương k . Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) n chia hết cho 3.

ii) các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2, 0, 1, 5\}$.

Lời giải. Vì 10^k không chia hết cho 3 nên ta chỉ cần xét các số từ 0 cho đến $\underbrace{999 \dots 9}_k \text{ chữ số}$, tức là các số có không quá k chữ số.

Đặt $S = \{2, 0, 1, 5\}$, bổ sung các chữ số 0 vào trước nếu cần thiết, ta đưa về xét các số có dạng $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ với $a_i \in S$. Ta cần đếm các số như vậy và chia hết cho 3. Chú ý là $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ chia hết cho 3, ta đưa bài toán về việc đếm số các bộ $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \in S^k$ sao cho tổng chia hết cho 3.

Đến đây ta có các hướng giải quyết như sau.

Cách 1. Dùng công thức truy hồi.

Với $i = 0, 1, 2$, ta đặt

$$A(n, i) = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in S^n \mid a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \equiv i \pmod{3}\}$$

và đặt

$$a_n = A(n, 0), b_n = A(n, 1), c_n = A(n, 2).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 2.$$

Xét phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ của $A(n+1, 0)$.

- Nếu $a_{n+1} = 0$ thì $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A(n, 0)$.
- Nếu $a_{n+1} = 2$ hoặc 5 thì $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A(n, 1)$.
- Nếu $a_{n+1} = 1$ thì $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A(n, 2)$.

Từ đây ta suy ra $a_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n$ (1). Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$b_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \quad (2)$$

và

$$c_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n \quad (3)$$

Từ đây ta tính được $a_2 = 5, b_2 = 6, c_2 = 5, a_3 = 22, b_3 = 21, c_3 = 21$. Cộng các đẳng thức (1), (2), (3) lại, về theo vế, ta có $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 4(a_n + b_n + c_n)$. Từ đây suy ra

$$a_n + b_n + c_n = 4^n$$

(Chú ý rằng điều này cũng có thể suy ra dễ dàng bằng quy tắc đếm).

Trừ (1) cho (2), trừ (2) cho (3), trừ (3) cho (1), ta được

$$a_{n+1} - b_{n+1} = b_n - c_n, b_{n+1} - c_{n+1} = c_n - a_n, c_{n+1} - a_{n+1} = a_n - b_n.$$

Do đó, $a_{n+3} - b_{n+3} = b_{n+2} - c_{n+2} = c_{n+1} - a_{n+1} = a_n - b_n$. Tương tự thì

$$b_{n+3} - c_{n+3} = b_n - c_n, c_{n+3} - a_{n+3} = c_n - a_n \text{ với mọi } n.$$

Sử dụng các giá trị ban đầu a_i, b_i, c_i với $i = 1, 2, 3$ và tính chất ở trên, ta suy ra rằng

- Nếu k chia hết cho 3 thì $b_k = c_k = a_k - 1$.
- Nếu k chia 3 dư 1 thì $a_k = b_k = c_k - 1$.
- Nếu k chia 3 dư 2 thì $a_k = c_k = b_k - 1$.

Từ đây, kết hợp với đẳng thức $a_k + b_k + c_k = 4^k$, ta suy ra kết quả

- $a_k = \frac{4^k - 1}{3}$ nếu k không chia hết cho 3;
- $a_k = \frac{4^k + 2}{3}$ nếu k chia hết cho 3.

Cách 2. Dùng đa thức và số phức

Xét đa thức

$$P(x) = (x^2 + 1 + x + x^5)^k$$

Ta có

$$P(x) = (x^2 + 1 + x + x^5)^k = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in S^k} x^{a_1 + a_2 + \dots + a_k}$$

Ta thấy tổng các hệ số của $P(x)$ bằng số các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in S^k$ và bằng 4^k . Hơn nữa số các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in S^k$ sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong khai triển của $P(x)$.

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{5k}x^{5k}$. Ta cần tính $T = \sum a_{3m}$ là tổng các hệ số chia hết cho 3 trong khai triển. Gọi ε là nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ thì ta có $\varepsilon^3 = 1$. Từ đó dễ dàng suy ra $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 0$ với mọi k không chia hết cho 3 và $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 3$ với k chia hết cho 3. (*)

Ta có

$$\begin{cases} P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{5k}, \\ P(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots + a_{5k}\varepsilon^{5k}, \\ P(\varepsilon^2) = a_0 + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^4 + a_3\varepsilon^6 + \dots + a_{5k}\varepsilon^{10k} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất (*), ta suy ra $P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2) = 3T$. Suy ra

$$T = \frac{P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2)}{3} = \frac{4^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{4k}}{3}$$

Cuối cùng, lại áp dụng tính chất (*) ta suy ra $T = \frac{4^k - 1}{3}$ nếu k không chia hết cho 3 và $T = \frac{4^k + 2}{3}$ nếu k chia hết cho 3. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán khá quen thuộc. Dạng này đã gặp ở một số đề thi của Rumani (2007), PTNK (2009) hay Lâm Đồng năm vừa rồi. Chẳng hạn đề thi PTNK 2009:

Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$?

Cái mới và cũng là cái khó của bài toán này là ở chữ số 0 và xét tất cả các số nhỏ hơn 10^k (chứ không phải là số có k chữ số). Tuy nhiên, như đã thấy trong lời giải trên, kết hợp hai cái khó và mới đó lại ta được một cái cũ (và dễ!). Theo phương pháp công thức truy hồi, có thể sẽ có một số bạn gặp khó khi giải hệ phương trình truy hồi (nếu có 2 dãy thì dễ hơn, 3 dãy khá rồi).

Nếu không xử lý được cái mới bằng cách lý luận như trên và phải đếm số các số có n chữ số lập từ $\{2, 0, 1, 5\}$ và chia hết cho 3 thì ta sẽ đưa đến cách giải sau:

Gọi A_n, B_n, C_n là số các số có n chữ số lập từ $\{2, 0, 1, 5\}$ và chia 3 dư 0, 1, 2 tương ứng. Khi đó ta có $A_1 = 1$, (số 0 ta coi là số có 1 chữ số), $B_1 = 1, C_1 = 2$ và

$$A_{n+1} = 2(B_n + B_{n-1} + \dots + B_1) + (C_n + C_{n-1} + \dots + C_1) \quad (1),$$

$$B_{n+1} = (A_n + A_{n-1} + \dots + A_1) + 2(C_n + C_{n-1} + \dots + C_1) \quad (2),$$

$$C_{n+1} = 2(A_n + A_{n-1} + \dots + A_1) + (B_n + B_{n-1} + \dots + B_1) \quad (3)$$

(học sinh rất dễ bị nhầm chỗ này)

Suy ra $A_2 = 4, B_2 = 5, C_2 = 3$.

Trong (1) thay n bằng $n + 1$, ta được

$$A_{n+2} = 2(B_{n+1} + B_n + \dots + B_1) + (C_{n+1} + C_n + \dots + C_1) \quad (4).$$

Lấy (4) trừ (1) ta được

$$A_{n+2} - A_{n+1} = 2B_{n+1} + C_{n+1},$$

tức là

$$A_{n+2} = A_{n+1} + 2B_{n+1} + C_{n+1}.$$

Tương tự,

$$B_{n+2} = A_{n+1} + B_{n+1} + 2C_{n+1}, C_{n+2} = 2A_{n+1} + B_{n+1} + C_{n+1}.$$

Do vậy, ta có $A_2 = 4, B_2 = 5, C_2 = 3$ và

$$A_{n+1} = A_n + 2B_n + C_n, B_{n+1} = A_n + B_n + 2C_n, C_{n+1} = 2A_n + B_n + C_n$$

với mọi $n \geq 2$.

Tiếp theo ta giải gần giống như lời giải 1. Chú ý đáp số của bài toán là $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ và theo (1), (2), (3) thì tổng này bằng

$$\frac{4C_{k+1} + B_{k+1} - 2A_{k+1}}{9}.$$

Trong tình huống đề yêu cầu chia hết cho số khác, không phải 3 thì lời giải sẽ thú vị hơn nhiều và trong tình huống đó, vai trò của hàm sinh thể hiện rõ hơn nhiều. Ta xem xét thử một số bài toán tương tự sau:

Bài 1. (Đề tập huấn đội tuyển IMO 2014) Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó không chứa chữ số 0 và chia hết cho 11?

Bài 2. (VMO 2008) Có bao nhiêu số tự nhiên có 2008 chữ số, chia hết cho 9 và trong biểu diễn của nó có không quá 2 chữ số 9?

Bài 3. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 7, có n chữ số và mỗi chữ số được lấy từ tập hợp $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$?

Bài 4. Có bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 5000 có tổng các chữ số chia hết cho 4?

Bài toán 4. Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I.

a) Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại điểm D. Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

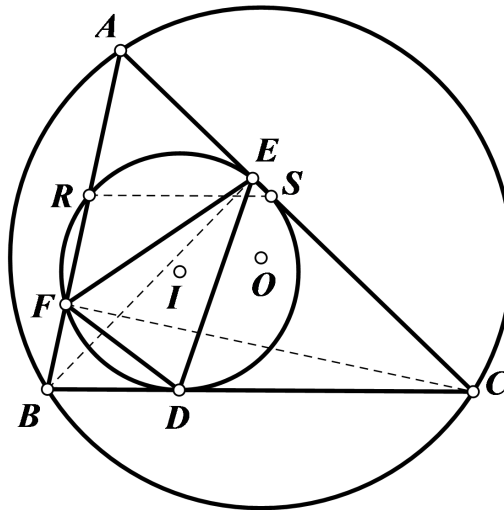
b) Giả sử (I) cắt cạnh BC tại hai điểm M, N. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là các giao điểm của (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại điểm T (T cùng phía A đối với PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc $\angle MTN$ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

a) Giả sử điểm D nằm trong cạnh BC, trường hợp điểm D nằm ngoài chứng minh tương tự. Ta có hai cách xử lý như sau:

Cách 1. Gọi R, S lần lượt là giao điểm của (I) với BC (các giao điểm này có thể tương ứng trùng E, F trong trường hợp tam giác ABC cân). Ta có

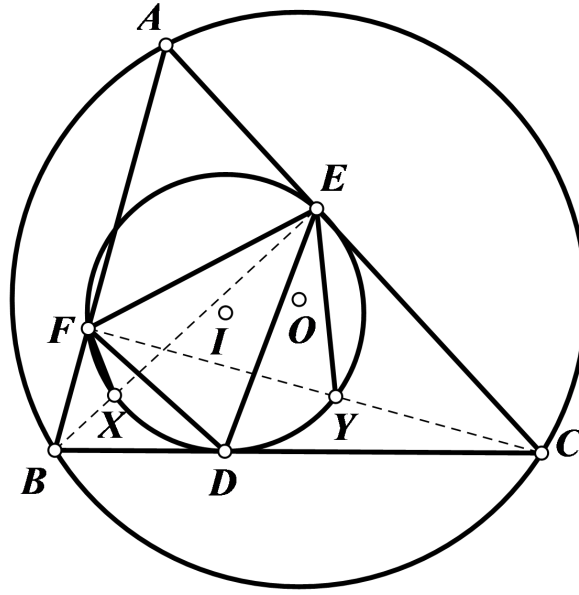
$$AR \cdot AF = AS \cdot AE \Rightarrow \frac{AR}{AS} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow RS \parallel BC.$$



Do (I) tiếp xúc với BC tại D nên

$$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{BF \cdot BR}{CE \cdot CS} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BR}{CS} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BE}{CF} = \frac{\cot B}{\cot C}.$$

Vậy ta có $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.



Cách 2. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của (I) với BE, CF. Ta có $BD^2 = BX \cdot BE$, $CD^2 = CY \cdot CF$ (phương tích với đường tròn (I)).

Hai tam giác BXF, CYE có $\angle XBF = \angle YCE$, $\angle BFX = \angle CEY$ nên đồng dạng. Suy ra

$$\frac{BX}{CY} = \frac{BF}{CE} = \frac{\cos B}{\cos C}.$$

Do đó,

$$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{BX}{CY} \cdot \frac{BE}{CF} = \frac{\cos B}{\cos C} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cot B}{\cot C}$$

hay

$$\frac{BD}{CD} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}.$$

b) Trường hợp tam giác ABC cân tại A, bài toán hiển nhiên đúng.

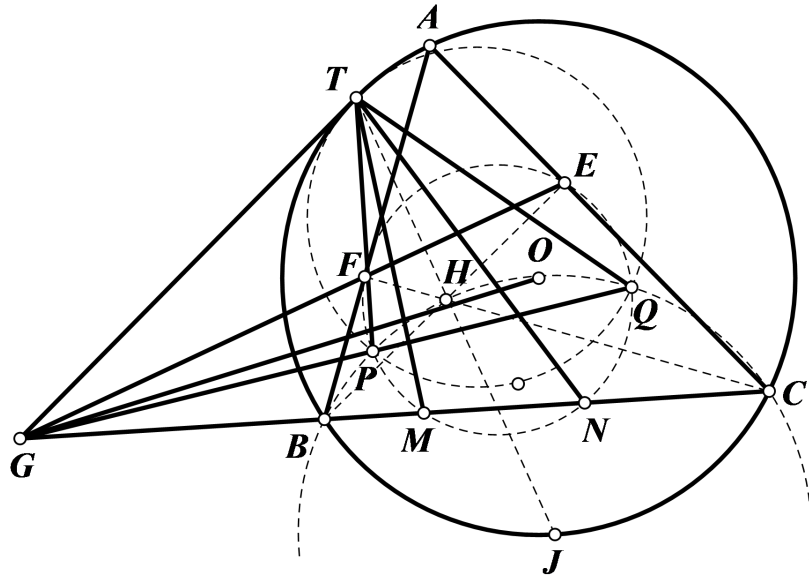
Xét trường hợp tam giác không cân ở A, không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$. Gọi G là giao điểm của EF và đường thẳng BC.

Xét các đường tròn (BHC), (I) và đường tròn đường kính BC. Ta thấy:

- Trục đẳng phương của (BHC), (I) là PQ.
- Trục đẳng phương của (I) và đường tròn đường kính BC là EF.
- Trục đẳng phương của (BHC) và đường tròn đường kính BC là BC.

Do đó, PQ, EF, BC đồng quy tại tâm đẳng phương của 3 đường tròn này. Ta có $GT^2 = GP \cdot GQ = GM \cdot GN$ nên đường tròn (TMN) cũng tiếp xúc với (O) tại T.

Do đó, ta có $\angle GTM = \angle GNT$ (cùng chắn cung TM của đường tròn (K)).



Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $\angle GNT = \angle NTC + \angle NCT$. Hơn nữa, do GT tiếp xúc với (O) nên $\angle GTB = \angle GCT$. Trừ tương ứng từng vế 2 đẳng thức, ta được $\angle BTM = \angle CTN$.

Từ đây dễ thấy phân giác của góc $\angle MTN$ và $\angle BTC$ là trùng nhau hay phân giác của $\angle MTN$ đi qua trung điểm J của cung BC không chứa A, đây là điểm cố định.

Ta có đpcm. □

Nhận xét. Về câu a của bài toán, có thể nói đây là một phần tương đối hay, nó không quá đơn giản nhưng cũng đủ để học sinh có thể tự tin và thoải mái để bắt tay vào thử sức. Việc sử dụng tính chất cơ bản của phương tích của đường tròn sẽ dẫn đến sự xuất hiện một cách tự nhiên của các điểm R, S, X, Y như trên.

Ngoài ra, với học sinh nào không quen với việc kẻ đường phụ, ta còn có thể lập luận bằng tỉ số lượng giác trực tiếp, không cần vẽ thêm bất cứ gì như sau:

Ký hiệu E là góc $\angle DEF = \angle BDF$, bằng biến đổi góc, ta có

$$\angle B = \angle AEF = 180^\circ - (\angle E + \angle CED) = 180^\circ - (\angle E + 180^\circ - (\angle C + \angle F)) = \angle C + \angle F - \angle E.$$

Suy ra $\angle B + \angle E = \angle C + \angle F$. Do đó $\angle BFD = \angle CED$, $\angle CFD = \angle BED$.

Xét tỉ lệ diện tích các tam giác

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S_{FBD}}{S_{FCD}} = \frac{FB \cdot FD \cdot \sin BFD}{FC \cdot FD \cdot \sin CFD} = \cot B \cdot \frac{\sin BFD}{\sin CFD}$$

và

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S_{EBD}}{S_{ECD}} = \frac{EB \cdot ED \cdot \sin BED}{EC \cdot ED \cdot \sin CED} = \frac{1}{\cot C} \cdot \frac{\sin BED}{\sin CED}.$$

Suy ra

$$\left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{\cot B}{\cot C} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}.$$

Lời giải này đã phát hiện ra một số cặp góc bằng nhau nữa và biến đổi cũng khá nhẹ nhàng.

Khai thác thêm mô hình này, ta cũng phát hiện ra thêm khá nhiều điều thú vị:

1. Bốn điểm R, S, X, Y là các đỉnh của một hình chữ nhật.
2. Đường thẳng nối giao điểm của DE, CF và DF, CE song song với BC.

Ta cũng thấy rằng, ngay từ đầu, học sinh cũng sẽ thắc mắc về cách dựng của đường tròn (I), tức là đường tròn đi qua 2 điểm cho trước và tiếp xúc với 1 đường thẳng. Nhiều bạn vẽ hình bằng cảm tính, dựng đường tròn (I) trước và chính điều này đã khiến họ không đi sâu vào bản chất của bài toán và trên cơ sở đó, giải quyết được câu b.

Đó chính là giao điểm G của EF, BC trong lời giải của bài toán đã nêu. Ta thấy rằng $GE \cdot GF = GD^2$ hay GD chính là trung bình nhân của hai đoạn GE, GF, hoàn toàn dựng được. Chú ý rằng, có 2 điểm D như vậy, một điểm nằm phía trong đoạn BC và một nằm phía ngoài đoạn BC, hai điểm này cùng với B, C lập thành một hàng điểm điều hòa.

Đến đây, ta phát hiện ra rằng cần phải có câu nhận xét như đầu tiên để hạn chế việc phụ thuộc hình vẽ, do đề không nêu rõ là tiếp xúc với cạnh hay với đường thẳng BC.

Ta cũng để ý rằng nếu gọi L là chân đường cao góc A của tam giác ABC thì $\frac{\cot B}{\cot C} = \frac{LB}{LC}$ nên bài a tương đương với $\frac{LB}{LC} = \frac{DB^2}{DC^2}$.

Một cách tự nhiên, ta đặt ra câu hỏi tổng quát: Điều kiện nào đối với bộ điểm A', B', C' nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC theo thứ tự, AA', BB', CC' đồng quy và đường tròn đi qua B', C' tiếp xúc với BC tại A_1 thì

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A_1B^2}{A_1C^2}?$$

Ngoài ra, nếu xét các đường tròn tương tự theo góc độ B, C thì cả ba đường tròn vẽ được sẽ có đặc điểm gì? Đây là các ý khai thác rất thú vị cho bài toán này.

Về câu b của bài toán, cũng tương tự như những bài toán về yếu tố cố định trong các kỳ thi VMO, TST gần đây, bài 4 lần này đòi hỏi học sinh khả năng phán đoán, suy luận tốt và nhất là khả năng "đơn giản hoá" bài toán, tìm ra yếu tố quyết định trong một loạt giả thiết có vẻ phức tạp và "ít tác dụng".

Bài toán này có lẽ được phát triển từ bổ đề sau: Cho tam giác ABC và M, N là các điểm thuộc BC , một điểm T nằm trên đường tròn (O) . Khi đó, nếu đường tròn (TMN) tiếp xúc với (O) tại T thì $\angle BTC, \angle MTN$ có chung đường phân giác trong.

Bổ đề này có thể chứng minh bằng cộng góc như lời giải trên, hoặc sử dụng phép vị tự tâm T biến M, N thành X, Y thuộc (O) thì $XY \parallel BC$ và ta có kết quả trên.

Do vậy, với những học sinh đã nhìn ra tính chất GT tiếp xúc với cả (TMN) và (O) thì chỉ cần mạnh dạn bỏ qua những "yếu tố thừa" trong đề là sẽ có ngay lời giải.

Ta có thể dự đoán điểm cố định thông qua việc xét hai điểm A đối xứng qua trung trực BC , từ đó suy ra điểm cố định cách đều B và C , sẽ dễ đưa đến kết luận hơn.

Có khá nhiều đường tròn góp mặt trong bài toán, nhưng với những học sinh có kinh nghiệm thì việc sử dụng tính chất trục đẳng phương để có các đường đồng quy là điều dễ hiểu. Dù đề bài được phát biểu tương đối dài và phức tạp, nhưng không phải là khó để xử lý những chuyện này.

Trên thực tế, ta có thể giải mà không cần sự có mặt của E, F . Vẫn với xuất phát từ trục đẳng phương, xét 3 đường tròn $(BHC), (O), (TPQ)$ thì sẽ có tiếp tuyến tại T đi qua giao điểm của BC, PQ .

Sự kiện EF cũng đi qua G có thể sẽ dẫn đến nhiều tính chất mới hoặc nếu kết hợp với các tính chất cũ cũng sẽ đưa ra nhiều bài toán khác để khai thác. Dưới đây là một bài toán mở rộng do bạn Nguyễn Văn Linh đề xuất:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn bất kỳ đi qua B, C và một đường tròn (J) khác thay đổi cắt BC tại M, N và cắt (I) tại P, Q . Đường tròn đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại T nằm cùng phía với A so với BC . Khi đó, phân giác góc MTN luôn đi qua trung điểm cung BC không chứa A .

Bài toán 5. Cho dãy đa thức $f_n(x)$ được xác định bởi

$$f_0(x) = 2, f_1(x) = 3x, f_n(x) = 3xf_{n-1}(x) + (1 - x - 2x^2)f_{n-2}(x), \forall n \geq 2.$$

Tìm tất cả các giá trị n để đa thức $f_n(x)$ chia hết cho đa thức $x^3 - x^2 + x$.

Lời giải. Từ công thức truy hồi đã cho, ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 3xf_{n-1}(x) + (1 - x - 2x^2)f_{n-2}(x) \\ \Leftrightarrow f_n(x) - (x+1)f_{n-1}(x) &= (2x-1)f_{n-1}(x) - (2x-1)(x+1)f_{n-2}(x) \\ \Leftrightarrow f_n(x) - (x+1)f_{n-1}(x) &= (2x-1)[f_{n-1}(x) - (x+1)f_{n-2}(x)] \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f_n(x) - (x+1)f_{n-1}(x) &= (2x-1)^{n-1}[f_1(x) - (x+1)f_0(x)] = (2x-1)^{n-1}(x-2) \\ \Leftrightarrow f_n(x) - (2x-1)^n &= (x+1)[f_{n-1}(x) - (2x-1)^{n-1}] \end{aligned}$$

Từ đây ta có

$$f_n(x) - (2x-1)^n = (x+1)^n[f_0(x) - (2x-1)^0] = (x+1)^n$$

hay

$$f_n(x) = (2x-1)^n + (x+1)^n.$$

Đặt $Q(x) = x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$.

Vì $f_n(x)$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^3 - x^2 + x$ nên $f_n(0) = 0$ hay $1 + (-1)^n = 0$ nên n lẻ.

Và $f_n(-2) = -(5^n + 1)$ (do n lẻ) chia hết cho $(-2)^2 - (-2) + 1 = 7$. Do $125 \equiv -1 \pmod{7}$ nên ta xét các trường hợp sau

- $n = 3k$, k lẻ, ta có $5^n + 1 = 5^{3k} + 1 \equiv (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{7}$
- $n = 3k + 1$, k chẵn, ta có $5^n + 1 = 5 \cdot 5^{3k} + 1 \equiv 6 \pmod{7}$
- $n = 3k + 2$, k lẻ, ta có $5^n + 1 = 25 \cdot 5^{3k} + 1 \equiv -24 \equiv 3 \pmod{7}$.

Từ đó, ta suy ra điều kiện cần của n là $n = 3k$ với k lẻ.

Khi đó $f_n(x) = (x+1)^{3k} + (2x-1)^{3k} = [(x+1)^3 + (2x-1)^3]^k$ với mọi k .

Nhận thấy $(x+1)^3 + (2x-1)^3 = 9x^3 - 9x^2 + 9x$ chia hết cho đa thức $g(x)$ nên ta có $n = 3k$ với k là số tự nhiên lẻ thỏa mãn. Đặt $k = 2m + 1$ với m nguyên thì $n = 6m + 3$.

Vậy tất cả các số n cần tìm có dạng $6m + 3$ với m là số nguyên dương. $\square$

Nhận xét. Ta có thể tìm ra được công thức tổng quát của dãy đa thức đã cho bằng cách coi x là hằng số và xây dựng số hạng của dãy số tương ứng, tức là xét dãy số

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 3x, \\ u_n = 3xu_{n-1} + (1 - x - 2x^2) u_{n-2} \end{cases}$$

với x là tham số thực nào đó.

Xét phương trình đặc trưng $t^2 - 3xt + 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow t = x + 1, t = 2x - 1$.

Suy ra $u_n = \alpha(x + 1)^n + \beta(2x - 1)^n$. Dựa vào u_0, u_1 ta tìm được $\alpha = \beta = 1$. Do đó, $f_n(x) = (x + 1)^n + (2x - 1)^n$.

Một cách khác để làm là dự đoán công thức thông qua việc tính toán trước vài giá trị:

- $f_0 = 2$;
- $f_1 = 3x$;
- $f_2 = 5x^2 - 2x + 2$;
- $f_3 = 9x^3 - 9x^2 + 9x$;
- $f_4 = 17x^4 - 37x^3 + 30x^2 - 4x + 2$.

Ta thấy hệ số bậc cao nhất của các đa thức có dạng $2^n + 1$ và hệ số cuối là 0 và 2 luân phiên nên dự đoán đa thức cần tìm có dạng $(2x \pm 1)^n + (x \pm 1)^n$.

Kiểm tra trực tiếp, ta thấy đa thức cần tìm là $(2x - 1)^n + (x + 1)^n$ và đến đây chỉ cần quy nạp là xong. Ngoài ra, ta có thể giải quyết ý còn lại là tìm n để có sự chia hết bằng cách dùng số phức như sau:

Do $f_n(x)$ chia hết cho $x^3 - x^2 + x$ nên $f_n(0) = f_n(\varepsilon) = f_n(\varepsilon^2) = 0$ với ε là số phức thỏa $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$.

Ta cũng có $\varepsilon^3 = -1$ và $\varepsilon \notin \mathbb{R}$. Ta có $f_n(0) = 0$ nên n là số lẻ. Đặt $n = 2k + 1$ thì

$$\begin{aligned} f_n(\varepsilon) &= (2\varepsilon - 1)^{2k+1} + (\varepsilon + 1)^{2k+1} \\ &= (2\varepsilon - 1)(4\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1)^k + (\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1)^k \\ &= (2\varepsilon - 1)(-3)^k + (\varepsilon + 1)(3\varepsilon)^k = (-3)^k \left((2\varepsilon - 1) + (\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^k \right) \end{aligned}$$

Do $f_n(\varepsilon) = 0$ nên ta cần có $(\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^k + (2\varepsilon - 1) = 0$. Ta xét các trường hợp sau:

- Với $k = 3t$ thì $(\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^k + 2\varepsilon - 1 = (\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^{3t} + 2\varepsilon - 1 = (\varepsilon + 1) + 2\varepsilon - 1 = 3\varepsilon \neq 0$, không thỏa.

- Với $k = 3t + 1$ thì $(\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^k + 2\varepsilon - 1 = (\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^{3t+1} + 2\varepsilon - 1 = (-\varepsilon^2 - \varepsilon) + 2\varepsilon - 1 = 0$, thỏa mãn.
- Với $k = 3t + 2$ thì $(\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^k + 2\varepsilon - 1 = (\varepsilon + 1)(-\varepsilon)^{3t+2} + 2\varepsilon - 1 = (\varepsilon^2 - 1) + 2\varepsilon - 1 \neq 0$, không thỏa.

Từ đó suy ra $n = 2(3t + 1) + 1 = 6t + 3$ thỏa mãn. Bước thử lại thực hiện tương tự.

Ta thấy bài toán này thuộc dạng tương đối chuẩn về tính chia hết của đa thức kết hợp với đa thức xác định bởi hệ thức truy hồi. Bài toán đặt ở vị trí đầu tiên của ngày 2 cùng với hai bài khác khó hơn hẳn khiến cho bài toán này dường như là lựa chọn duy nhất cho các thí sinh.

Dạng đa thức xác định bởi truy hồi này cũng không phải quá xa lạ, ít nhất là với đa thức Chebyshev nổi tiếng; tuy nhiên, nhiều thí sinh tỏ ra lúng túng và không giải quyết được trọn vẹn bài toán này là điều rất đáng tiếc.

Dưới đây là một bài tương tự:

Cho dãy đa thức $f_n(x)$ xác định bởi công thức

$$\begin{cases} f_0(x) = 2, f_1(x) = 2x + 2, \\ f_{n+2}(x) = (2x + 2)f_{n+1}(x) - (x^2 + 2x - 3)f_n(x), n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị n sao cho $f_n(x)$ chia hết cho $x^2 + 2x + 5$.

Bài toán 6. Với a, n nguyên dương, xét phương trình $a^2x + 6ay + 36z = n$ trong đó x, y, z là các số tự nhiên.

a) Tìm tất cả các giá trị của a để với mọi $n \geq 250$, phương trình đã cho luôn có nghiệm (x, y, z) .

b) Biết rằng $a > 1$ và nguyên tố cùng nhau với 6. Tìm giá trị lớn nhất của n theo a để phương trình đã cho không có nghiệm (x, y, z) .

Lời giải. Ta sẽ sử dụng bổ đề quen thuộc sau:

Cho các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau. Khi đó, số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với x, y tự nhiên là $N_0 = ab - a - b$. Nói cách khác, $N_0 = ab - a - b + 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho phương trình $ax + by = m$ có nghiệm tự nhiên với mọi $m \geq N$. (**Định lý Sylvester**).

a) Giả sử a là một giá trị thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta sẽ nói ngắn gọn số n là “biểu diễn được” nếu tồn tại x, y, z tự nhiên sao cho

$$a^2x + 6ay + 36z = n.$$

Rõ ràng $(a, 6) = 1$ vì nếu ngược lại, giả sử $(a, 6) = d > 1$ thì $a^2x + 6ay + 36z$ chia hết cho d . Ta chọn $n \geq 250$ và n không chia hết cho d thì dẫn đến mâu thuẫn.

Dễ thấy rằng điều kiện cần để mọi $n \geq 250$ biểu diễn được là $(a, 6) = 1$. Để ý rằng

$$a^2x + 6ay + 36z = a^2x + 6(ay + 6z) = a(ax + 6y) + 36z$$

Áp dụng bổ đề trên, ta thấy các số

$$6a^2 - a^2 - 6 = 5a^2 - 6 \text{ và } 36a + 36 - a = 35a + 36$$

tương ứng là các số lớn nhất không biểu diễn được trong từng cách biểu diễn. Suy ra

$$5a^2 - 5 < 250, 35a + 36 < 250$$

Suy ra $a < 7$. Kết hợp với điều kiện $(a, 6) = 1$ suy ra chỉ có $a = 1, a = 5$ thỏa mãn.

Ta sẽ chứng minh $a = 1, a = 5$ cũng chính là các số cần tìm. Thật vậy,

Với $a = 1$, ta có $x + 6y + 36z = n$, phương trình luôn có nghiệm là $(n; 0; 0)$.

Với $a = 5$, ta chứng minh mọi số $n \geq 250$ đều biểu diễn được dưới dạng $25x + 30y + 36z$ với x, y, z tự nhiên. Ta viết

$$25x + 30y + 36z = 25x + 6(5y + 6z - 20) + 120.$$

Áp dụng bổ đề, mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 20 đều có thể biểu diễn được dưới dạng $5y + 6z$ nên suy ra mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn được dưới dạng $5y + 6z - 20$ với y, z tự nhiên.

Tương tự, mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 120 đều biểu diễn được dưới dạng $25x + 6u$. Với $m \geq 250$ thì $m - 120 \geq 120 > 120$ nên tồn tại x và u tự nhiên sao cho $m - 120 = 25x + 6u$. Lại chọn y, z tự nhiên sao cho $u = 5y + 6z - 20$ thì được $m - 120 = 25x + 6(5y + 6z - 20)$. Suy ra $m = 25x + 30y + 36z$.

Vậy tất cả các giá trị a cần tìm là $a = 1, a = 5$.

b) Ta chứng minh bài toán tổng quát sau: Cho các số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau. Khi đó

$$N = a^2b + ab^2 - a^2 - b^2 - ab + 1$$

là số nguyên dương nhỏ nhất để phương trình $a^2x + aby + b^2z = m$ có nghiệm tự nhiên với mọi $m \geq N$.

Thật vậy, nếu $m \geq N$, ta viết phương trình $a^2x + aby + b^2z = m$ dưới dạng

$$a(ax + by - (ab - a - b + 1) + b^2z = m - a^2b + a^2 + ab - a$$

Do $m - a^2b + a^2 + ab - a \geq b^2a - b^2 - a + 1$ nên theo bổ đề ở câu a, tồn tại u, z tự nhiên sao cho

$$m - a^2b + a^2 + ab - a = au + b^2z.$$

Lại áp dụng bổ đề, tồn tại x, y tự nhiên sao cho $u + ab - a - b + 1 = ax + by$. Khi đó

$$m - a^2b + a^2 + ab - a = a(ax + by - (ab - a - b + 1)) + b^2z \Leftrightarrow m = a^2x + aby + b^2z$$

Cuối cùng, ta chứng minh số $a^2b + ab^2 - a^2 - b^2 - ab$ không biểu diễn được dưới dạng $a^2x + aby + b^2z$ với x, y, z tự nhiên.

Thật vậy, giả sử ngược lại, nếu tồn tại x, y, z tự nhiên sao cho

$$a^2b + ab^2 - a^2 - b^2 - ab = a^2x + aby + b^2z$$

thì $a^2(b - 1 - x) + b^2(a - 1 - z) = ab(y + 1)$. Suy ra hoặc $b - 1 - x > 0$ hoặc $a - 1 - z > 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $b - 1 - x > 0$. Ta viết đẳng thức trên dưới dạng $a^2(b - 1 - x) = b(ay + bz - ab + b + a)$.

Do $(a^2, b) = 1$ nên từ đây suy ra $b - 1 - x$ chia hết cho b . Điều này mâu thuẫn vì $0 < b - 1 - x < b$. Do đó, $a^2b + ab^2 - a^2 - b^2 - ab$ không biểu diễn được dưới dạng $a^2x + aby + b^2z$ với x, y, z tự nhiên.

Bài toán được chứng minh.

Câu b của bài toán này chính là trường hợp đặc biệt của bài toán vừa phát biểu với $b = 6$ nên số n lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $a^2x + 6ay + 36z$ với x, y, z tự nhiên là số $5a^2 + 30a - 36$. $\square$

Nhận xét. Chủ đề định lý Bezout, thuật toán Euclid là một chủ đề quan trọng trong chương trình số học. Nếu nắm vững chủ đề này thì cũng sẽ nắm được định lý Sylvester và làm quen với bài toán Frobenius về các đồng xu. Đây là nội dung đã gặp trong khá nhiều đề thi, ví dụ như đề thi IMO 1983, VN TST 2000. Cụ thể là:

Bài 1.(IMO 1983) Cho a, b, c là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $2abc - ab - bc - ca$ là số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số tự nhiên.

Bài 2. (VN TST 2000) Cho a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau. Số nguyên dương n được gọi là số bướng bỉnh nếu không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ trong đó x, y, z là các số nguyên dương. Hỏi có tất cả bao nhiêu số bướng bỉnh?

Bài 3. (Titu Andreescu, 104 Number Theory Problems) Cho a và n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng số nghiệm nguyên không âm (x, y, z) của phương trình $ax + by + z = ab$ là

$$\frac{1}{2} [(a+1)(b+1) + (a, b) + 1].$$

Định lý Sylvester thực ra được phát biểu đầy đủ như sau (xem thêm tài liệu **Số học qua các định lý và bài toán**):

Cho a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $N_0 = ab - a - b$ là số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với x, y là các số nguyên không âm. Hơn nữa, với mọi p, q nguyên với $p + q = N_0$, có đúng một trong hai số p, q biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với x, y là các số nguyên không âm (mà ta gọi tắt là biểu diễn được).

Định lý này được chứng minh thông qua bổ đề sau:

Bổ đề. Cho a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và $b > 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên N , tồn tại duy nhất cặp số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện $N = ax + by$ và $0 \leq x < b$.

Chứng minh bổ đề.

Do $(a, b) = 1$ nên theo định lý Bezout, tồn tại x, y sao cho $N = ax + by$. Bây giờ chia cho b , ta được $x = bq + x_0$ với $0 \leq x_0 < b$ và ta có $N = a(bq + x_0) + by = ax_0 + b(y + qa)$. Tính tồn tại được chứng minh. Tính duy nhất là hiển nhiên vì nếu có 2 biểu diễn như thế thì ta có $ax + by = ax' + by'$, suy ra $a(x - x') = b(y' - y)$. Suy ra $x - x'$ chia hết cho b . Mà $0 \leq x, x' < b$ nên điều này vô lý.

Quay trở lại định lý, nếu $n > N_0$. Áp dụng bổ đề, tồn tại x, y nguyên sao cho $n = ax + by$ với $0 \leq x < b$. Suy ra $by > ab - a - b - ax = ab - a(b - 1) = -b$. Suy ra $y \geq 0$. Vậy ta đã tìm được x, y tự nhiên sao cho $n = ax + by$.

Nếu N_0 biểu diễn được thì ta có $ab - a - b = ax + by$ với $x, y \geq 0$. Ta có hai biểu diễn $ab - a - b = a(b - 1) + b(-1)$ và $ab - a - b = ax + by$. Từ tính duy nhất ở trên, ta suy ra $y = -1$, mâu thuẫn.

Vậy N_0 không biểu diễn được. Do N_0 không biểu diễn được nên nếu $p + q = N_0$ thì chỉ có nhiều nhất 1 trong 2 số p, q biểu diễn được. Cuối cùng, nếu p không biểu diễn được thì chọn x, y sao cho $p = ax + by$ với $0 \leq x < b$ thì ta phải có $y < 0$. Lúc đó

$$q = N_0 - p = ab - a - b - ax - by = a(b - 1 - x) + b(-y - 1)$$

biểu diễn được do $b - 1 - x \geq 0$ và $-y - 1 \geq 0$.

Nói thêm về bài toán Frobenius về những đồng xu. Đây là bài toán xác định số tiền lớn nhất không thể trả được khi chỉ sử dụng các đồng xu có mệnh giá cố định nào đó. Ví dụ với các đồng xu mệnh giá 3 và 5 đơn vị thì số tiền lớn nhất không trả được là 7 đơn vị. Số lớn nhất với mỗi bộ số như thế ta gọi là số Frobenius.

Một cách toán học, bài toán được phát biểu như sau: Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ có ước chung lớn nhất là 1. Tìm số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$ với $k_1, k_2, \dots, k_n$ là các số nguyên không âm. Số nguyên lớn nhất này được gọi là số Frobenius và thường được ký hiệu là $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Với $n = 2$, bài toán này có lời giải trọn vẹn và đó chính là định lý Sylvester đã nêu. Xa hơn nữa, người ta đã chứng minh được một số kết quả liên quan như:

1. Định lý Schur khẳng định rằng với điều kiện các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ có ước chung lớn nhất là 1 thì số Frobenius tồn tại.
2. $g(a, b, c) \geq \sqrt{3abc} - a - b - c$
3. Với n bất kỳ, tìm ra được công thức hàm g cho các cặp số cộng, cấp số nhân, ngoài ra là một số đánh giá chặn trên, chặn dưới.

Như vậy với $n > 2$ và các bất kỳ thì tính tới nay chưa tìm được công thức tường minh cho hàm $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và có vẻ hướng đi này không khả thi. Trong khi đó, với một số lượng đồng xu cố định, tồn tại thuật toán để tính số Frobenius trong thời gian đa thức (tính theo logarithm của giá trị tiền xu có trong dữ liệu vào). Hiện chưa có thuật toán thời gian đa thức theo số đồng xu, và bài toán tổng quát khi giá trị đồng xu là lớn tùy ý là bài toán NP-khó.

Bài toán 7. Có m học sinh nữ và n học sinh nam ($m, n \geq 2$) tham gia một liên hoan song ca. Tại liên hoan song ca, mỗi buổi biểu diễn một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một số bài hát song ca nam – nữ mà trong đó, mỗi đôi nam – nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài. Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam – nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.

- a) Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh X nếu như hủy tất cả các bài song ca mà X tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào X thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.
- b) Chứng minh rằng ban tổ chức liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.

Lời giải.

a) Ta đánh số các học sinh nữ theo thứ tự từ 1 đến m và các học sinh nam từ 1 đến n . Ứng với mỗi chương trình văn nghệ, ta biểu diễn việc ghép cặp của các cặp nam nữ song ca thành một bảng $m \times n$ gồm m hàng n cột như sau: Bảng sẽ được đánh số 1 hoặc 0, trong đó ô nằm ở hàng i cột j được điền số:

- Số 1 nếu học sinh nữ thứ i và học sinh nam thứ j có hát với nhau.
- Số 0 nếu học sinh nữ thứ i và học sinh nam thứ j không hát với nhau.

0	0	1	0	1
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	1	1

Một bảng gọi là **tốt** nếu trên mỗi hàng và mỗi cột đều phải có ít nhất một số 1. Rõ ràng theo đề bài thì tất cả các bảng biểu diễn cho chương trình đều là tốt vì học sinh nào cũng có biểu diễn.

Xét một học sinh X nào đó, giả sử đó là nữ; trường hợp học sinh nam chứng minh tương tự. Chương trình nào đó lệ thuộc học sinh X nếu như trên bảng tương ứng của nó, tồn tại ít nhất 1 cột có đúng một số 1 nằm

trên hàng của X , ta gọi bảng này là lệ thuộc X và cột như thế là cột lệ thuộc X .

Ta cần chứng minh rằng, trong các bảng lệ thuộc X , số bảng có số các số 1 chẵn bằng số bảng có số các số 1 lẻ.

Thật vậy,

Xét trường hợp trong bảng có k cột lệ thuộc X thì rõ ràng $k < n$ vì nếu không, ngược lại, $k = n$ thì toàn bộ các ô trên hàng X đều là 1, còn tất cả các ô còn lại của bảng đều là 0. Do $m \geq 2$ nên tồn tại một dòng toàn là số 0, mâu thuẫn. Với $k < n$, ta bỏ k cột đó ra khỏi bảng thì trên bảng sẽ mất đi đúng k số 1. Mỗi ô trong $n - k$ ô còn lại của hàng X sẽ được điền số 0 hoặc 1 tùy ý vì các cột còn lại đều còn ít nhất một số 1 nữa không thuộc hàng X . Do đó, nếu ta bỏ luôn hàng X đi thì bảng còn lại vẫn là tốt.

Suy ra số bảng lệ thuộc X trong trường hợp này sẽ là 2^{n-k} nhân với số lượng bảng tốt có kích thước $(m-1) \times (n-k)$ còn lại. Trong mỗi bảng đó, ta chọn một ô bất kỳ của hàng X và thay đổi số từ $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ thì sẽ dẫn đến thay đổi tính chẵn lẻ của số các số 1 trên bảng.

Do đó, rõ ràng tồn tại một song ánh đi từ tập hợp các bảng lệ thuộc X có số các số 1 chẵn đến tập hợp các bảng lệ thuộc X có số các số 1 lẻ.

Do đó, số lượng hai loại bảng này là bằng nhau. Ứng với mỗi $k = \overline{1, n-1}$ và các cách chọn k cột phụ thuộc X thì số lượng bảng có số 1 lẻ và chẵn đều bằng nhau, vì thế nên tổng số bảng có số các số 1 lẻ bằng với bảng có số các số 1 chẵn. Ta có đpcm.

b) Tiếp theo, ta đặt $f(m, n)$ và $g(m, n)$ lần lượt là số các bảng tốt $m \times n$ có chẵn và lẻ các số 1. Xét một học sinh nữ tùy ý, đặt là X . Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu tồn tại một cột nào đó lệ thuộc X thì theo câu a, số bảng có số các 1 chẵn bằng số bảng có số các số 1 lẻ, đặt giá trị này là $h(m, n)$.
- Nếu không tồn tại cột nào lệ thuộc X thì bỏ hàng tương ứng của X đi, ta còn lại một bảng tốt có $m-1$ hàng và n cột.

Mặt khác, số trường hợp mà hàng X có số lẻ và có số chẵn ô điền số 1 lần lượt là

$$L = \sum_{a \equiv 1 \pmod{2}} C_n^a \text{ và}$$

$$C = \sum_{a \equiv 0 \pmod{2}, a > 0} C_n^a \text{ (do hàng } X \text{ không thể toàn là số 0)}$$

Ta biết rằng $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ nên với $x = -1$, ta có ngay $L = C + 1$.

Chú ý là tính chẵn lẻ của số các số 1 thuộc dòng X sẽ quyết định đến tính chẵn lẻ của bảng còn lại nên ta có công thức truy hồi sau

$$\begin{cases} f(m, n) = h(m, n) + L \cdot g(m-1, n) + C \cdot f(m-1, n) \\ g(m, n) = h(m, n) + L \cdot f(m-1, n) + C \cdot g(m-1, n) \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(m, n) - g(m, n) &= (L - C)(g(m-1, n) - f(m-1, n)) \\ &= g(m-1, n) - f(m-1, n) \end{aligned}$$

Lặp lại quá trình này đến khi số hàng và số cột nhỏ nhất có thể, tức là $m = n = 2$, ta có

$$f(m, n) - g(m, n) = (-1)^{m+n-4} (f(2, 2) - g(2, 2)).$$

Đếm trực tiếp, ta thấy có $f(2, 2) = 3, g(2, 2) = 4$ nên suy ra $f(m, n) - g(m, n) = (-1)^{m+n-3}$. Từ đó ta thấy rằng số lượng của hai loại bảng không vượt quá 1 và có thể sắp xếp các bảng theo thứ tự chẵn, lẻ đan xen để được điều kiện đề bài.

Ta cũng có đpcm. □

Nhận xét. Có thể nói đây là một bài tổ hợp dài nhất trong lịch sử các kỳ thi VMO. Cách đây đúng 10 năm, trong đề VMO 2005 bảng A có một bài liên quan đến định lý Turan mà trên tạp chí THPT đã từng nhận xét: *"Đây là một bài toán rời rạc, không phải khó song hầu hết học sinh đều bó tay! Tại sao vậy? Có lẽ vấn đề là tâm lý. Trước hết khi đọc đề ra học sinh thấy choáng ngợp bởi các khái niệm đưa ra trong bài toán và các mối quan hệ logic giữa chúng, nếu thoáng qua thì chưa thể hiểu được ngay."* Trong bài toán này, nhận xét trên dường như vẫn phù hợp.

Và nó cùng với bài 5 trong đề VMO 2009 là các bài toán dạng đếm bằng hai cách, mô hình hóa thành bảng có thể nói là khó nhất trong nhiều năm trở lại đây.

Bài toán này đặt cuối đề thi, có độ dài và số điểm như thế khiến nhiều thí sinh đã bỏ cuộc ngay từ bước đọc đề. Kỳ thực, bài toán cũng không đến nỗi quá khó hiểu và có lẽ tác giả đã rất cố gắng trong việc diễn đạt đề bài một cách rõ ràng nhất có thể. Tuy nhiên, trong đề bài có giả thiết *mỗi đôi nam - nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài* đã khiến nhiều thí sinh hoang mang và không hiểu là thông tin này mô tả cho một chương trình hay là cả kỳ liên hoan này. Nếu mô tả cho chương trình thì có vẻ hơi rối rắm và lung tung, mỗi học sinh có thể lên diễn nhiều lần trong một chương trình và các tiết mục có thể được lặp đi lặp lại trong nhiều chương trình khác nhau. Nhưng kỳ thực, nó lại chính là ý muốn của đề bài.

Để tiến hành xử lý bài toán, ta cần phải tìm cách mô hình hóa nó thành dạng thích hợp, trong đó, mọi ràng buộc đều có thể biểu diễn được. Ở

đây, việc lập thành bảng nhị phân cho một chương trình cụ thể như trên có lẽ là lựa chọn sáng sủa, đơn giản nhất. Cách này cũng quen thuộc với hầu hết các học sinh vì bài toán về tô màu bảng, điền số trên bảng cũng tương đối quen thuộc (ít nhất là trong đề kiểm tra của Viện Toán trong tháng 12 vừa qua cũng có một bài như thế).

Bên cạnh lựa chọn đó, ta cũng có thể dùng các cách tiếp cận khác như:

- Dùng bipartite graph hay còn gọi là đồ thị lưỡng phân, đồ thị 2 phe rồi thao tác trên các đỉnh và cạnh.
- Dùng cách chia thành các bộ (nam, nữ, chương trình) rồi đếm bằng 2 cách và tính tổng, hoặc cách nói khác là xét hàm số $f(a, b, c) : (A \times B \times C) \rightarrow \{0, 1\}$ với A, B, C lần lượt là tập hợp nữ, nam và các chương trình.

Suy cho cùng, các cách này cũng là song ánh, chuyển đổi cách tiếp cận nhưng bản chất vẫn thế: bảng tốt chính là một ma trận cạnh kề của đồ thị và nó cũng chính là tổng hợp các giá trị mà hàm ở trên nhận được với cùng một giá trị $c \in C$.

Một nhận xét cơ bản nhưng mang tính quyết định trong cả 2 ý a và b của bài toán là: Trong các tập hợp con của một tập hợp có $n \geq 1$ phần tử, số tập hợp con có lẻ phần tử bằng số tập hợp con có chẵn phần tử và cùng bằng 2^{n-1} . Ý này có thể giải quyết dễ dàng bằng song ánh hoặc đếm trực tiếp và dùng nhị thức Newton.

So sánh với các bài toán trong những năm gần đây, có thể coi đây là bài toán mà phần a hỗ trợ rất tốt cho phần b với việc chia một "trường hợp lớn" thành hai trường hợp nhỏ. Phần a vừa có tác dụng gợi ý, vừa đóng góp một phần vào lập luận của phần b. Cái khó của bài toán này có lẽ ở chỗ sử dụng ý tưởng truy hồi quy nạp, và đi đến cùng.

Chúng ta sẽ đặt ra câu hỏi sau đây một cách tự nhiên: "Có tất cả bao nhiêu chương trình trong liên hoan văn nghệ?". Đây là một bài toán không dễ và không cho ra kết quả dạng tường minh nhưng có thể đã có thí sinh nào đó mà trong bài thi của mình, đã cố gắng đếm số lượng này.

Ta có thể giải quyết bằng nguyên lý bù trừ như sau (ta vẫn xét bảng có m hàng và n cột): Ta gọi một bảng mà mỗi hàng đều có ít nhất một số 1 là bảng "tốt theo hàng", gọi tập hợp các bảng này là P . Gọi A là tập hợp các bảng tốt theo hàng nhưng lại có một cột nào đó không có số 1 nào, A_i là tập hợp các bảng tốt theo hàng nhưng cột thứ i lại không có số 1 nào. Ta thấy

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n.$$

Rõ ràng số bảng tốt cần tìm chính là $|P| - |A|$. Trước hết, ta tính số bảng tốt theo hàng.

Chú ý rằng mỗi ô có hai cách điền là 0 hoặc 1 nên hàng có n ô sẽ có 2^n cách, tuy nhiên, loại trừ trường hợp tất cả các ô đều là 0 ra thì có $2^n - 1$ cách. Các hàng khác cũng tương tự thế nên có tổng cộng $(2^n - 1)^m$ bảng tốt theo hàng hay $|P| = (2^n - 1)^m$. Do các cột bình đẳng với nhau nên ta có thể đếm đại diện một trường hợp nào đó để suy ra các trường hợp còn lại. Giả sử có k cột nào đó trong các cột $1, 2, 3, \dots, n$ là không chứa số 1 nào với $1 \leq k < n$. Trên mỗi hàng sẽ còn lại $n - k$ ô để điền vào các số 0 hoặc 1 sao cho có ít nhất một số 1 (do k ô thuộc các cột kia đều được điền số 0), số cách điền cho mỗi hàng là $2^{n-k} - 1$ và cho cả bảng là $(2^{n-k} - 1)^m$.

Từ đó, theo nguyên lý bù trừ, ta có

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m.$$

Do đó, ta được số bảng tốt cần tìm là

$$(2^n - 1)^m - \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m$$

Với tính bình đẳng của m, n , ta cũng suy ra được đẳng thức sau

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k (2^{m-k} - 1)^n.$$

Trên bảng nhị phân $m \times n$, ta còn có thể đặt ra nhiều câu hỏi tương tự như:

Bài 1.(Columbia Olympiad) Có bao nhiêu bảng nhị phân $m \times n$ sao cho trong mỗi hình vuông con 2×2 của bảng thì số các số 0 bằng số các số 1? Đáp số là: $2^m + 2^n - 2$.

Bài 2.(Đề kiểm tra của Viện Toán 2014) Có bao nhiêu bảng nhị phân $m \times n$ mà mỗi hàng và mỗi cột đều có số chẵn số 1? Đáp số là: $2^{(m-1) \times (n-1)}$.

Bài 3.(AIME 2007) Có bao nhiêu bảng nhị phân 6×4 sao cho có đúng 12 số 1 và mỗi hàng có đúng 2 số 1 và mỗi cột có đúng 4 số 1? Đáp số là: 1860.

Cuối cùng, nhận xét chung về bài toán này, ta thấy phát biểu của nó còn hơi khiên cưỡng dẫn đến bài toán công kênh, nặng nề. Có lẽ xuất phát từ một kết quả nghiên cứu cũ nào đó, tác giả đã chuyển đổi từ ngôn ngữ Toán học sang một tình huống thực tế trong đời sống. Nhưng do phải đảm bảo nhiều quan hệ nội tại trong vấn đề gốc nên cuối cùng, tình huống đó lại phản tác dụng trở nên rắc rối, thiếu tự nhiên. Có lẽ nếu phát biểu thành dạng bảng hoặc dạng đồ thị như đã phân tích ở trên thì có nhiều học sinh sẽ nắm bắt tốt ý tưởng hơn và sẽ mạnh dạn tiếp cận hơn, nhiều khi kiểm tra năng lực, khả năng tư duy của học sinh thì cũng chỉ cần ở mức độ như thế mà thôi.